UNIVERSITEIT GENT

FACULTY OF SCIENCES

Faculteit Wetenschappen

Vakgroep Wiskunde

De restterm in de priemgetalstelling

Bart MICHELS

Promotor: Prof. dr. J. Vindas Díaz

Bachelorproef ingediend tot het behalen van de academische graad van bachelor in de Wiskunde

Academiejaar 2015–2016

Voorwoord

Dit bachelorproject vormt het slot van mijn bacheloropleiding wiskunde aan de Universiteit Gent. Het was een plezier om dieper te graven in het terrein van de complexe analyse, en dit binnen het kader van mijn toch wel favoriete vakgebied, de getaltheorie.

Ik bedank graag prof. dr. J. Vindas, als promotor: voor de ondersteuning, het aanreiken van studiemateriaal en de vele tangentiële wetenswaardigheden, en als lesgever van de inspirerende vakken over analytische getaltheorie die ik in en naast mijn bacheloropleiding heb gevolgd.

Lokeren, mei 2016

Bart Michels

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Waar elementaire getaltheorie zich bezig houdt met deelbaarheid, congruenties, identiteiten voor getaltheoretische functies, ... komt een massa vragen naar boven wanneer we willen onderzoeken hoe bepaalde getaltheoretische functies zich asymptotisch gedragen. Nemen we als voorbeeld relatief prieme natuurlijke getallen. Zij $n \in \mathbb{N}^+$ (we noteren $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \sqcup \{0\}$). Bij definitie is het aantal positieve natuurlijke getallen $\leqslant n$ die relatief priem zijn met n gelijk aan de Euler-totiëntfunctie, genoteerd $\varphi(n)$. De 'kans' dat een natuurlijk getal $\leqslant n$ relatief priem is met n is dus $\frac{\varphi(n)}{n}$. Het is niet moeilijk in te zien dat de kans dat twee willekeurig gekozen natuurlijke getallen $\leqslant n$ relatief priem zijn, gelijk is aan

$$\frac{1}{n^2}\left(1 + 2\sum_{2\leqslant k\leqslant n}\varphi(k)\right).$$

Men kan zich dan de vraag stellen hoe deze uitdrukking zich gedraagt als $n \to \infty$. Zou ze naar 1 naderen, dan kunnen we zeggen dat de kans dat twee natuurlijke getallen relatief priem zijn, gelijk is aan 1. (We laten het begrip 'kans' hier bewust vaag.) Men kan bewijzen dat de limiet gelijk is aan $6/\pi^2$ (merk op dat het op zich al niet voor de hand ligt dat de limiet bestaat!), zie bv. [4, Theorem 2.16, p. 68].
We nemen als tweede voorbeeld kwadraatvrije getallen: $n \in \mathbb{N}^+$ noemen we kwadraatvrij als $p^2 \nmid n$ voor elk priemgetal p. M.b.v. Dirichletconvolutie kan men aantonen dat het aantal kwadraatvrije getallen $\leqslant n$ gelijk is aan

$$\sum_{k^2\leqslant n}\mu(k)\left\lfloor\frac{n}{k^2}\right\rfloor.$$

Hierbij staat $\lfloor x\rfloor$ voor het kleinste geheel getal $\leqslant x$, en is μ de Möbiusfunctie, gedefinieerd als

$$\mu(n) = \begin{cases}(-1)^r & \text{als } n \text{ kwadraatvrij is en } r \text{ verschillende priemdelers heeft;}\\ 0 & \text{als } n \text{ niet kwadraatvrij is.}\end{cases}$$

Men kan dan aantonen dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k^2\leqslant n}\mu(k)\left\lfloor\frac{n}{k^2}\right\rfloor = \frac{6}{\pi^2}$$

(zie bv. [4, Theorem 2.18, p. 70]), dus de kans dat een natuurlijk getal kwadraatvrij is, is $6/\pi^2$.
Talloze gelijkaardige problemen zijn denkbaar, en al snel blijkt de noodzaak om te weten hoe snel de convergentie is van dergelijke limieten. Men kan bijvoorbeeld bewijzen dat er een constante $C > 0$ bestaat waarvoor

$$\sqrt{n}\left|\sum_{k^2\leqslant n}\mu(k)\left\lfloor\frac{n}{k^2}\right\rfloor - \frac{6}{\pi^2}n\right| \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{1.1}$$

Voor bepaalde toepassingen is het van belang meer precies de convergentiesnelheid te kennen. Veel dergelijke problemen in de analytische getaltheorie zijn te reduceren tot of gerelateerd aan de verdeling van de priemgetallen, met in het bijzonder de priemgetalstelling:

Stelling 1.1 (Priemgetalstelling)**.** *Noteer voor $x \in \mathbb{R}$ ($x \geqslant 1$) met $\pi(x)$ het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Dan is*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Zo kan men m.b.v. de priemgetalstelling aantonen dat het linkerlid in (1.1) als limiet 0 heeft voor $n \to \infty$ ([4, Exercise 3.11, p. 104]) en dus niet zomaar begrensd is.
De priemgetalstelling werd in het begin van de 19e eeuw al vermoed door o.a. Legendre en Gauss, op basis van numerieke tabellen voor $\pi(x)$. De eerste theoretische vooruitgang kwam met Chebyshev: halfweg de 19e eeuw bewees hij dat er positieve constanten $c_1 < 1 < c_2$ bestaan zo dat

$$c_1 \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant c_2 \frac{x}{\log x} \quad \text{voor } x \text{ voldoende groot}$$

(hij bewees dit voor $c_1 = 0.92\ldots$ en $c_2 = 1.10\ldots$) en dat als de limiet van $\pi(x)/(x/\log x)$ bestaat, deze niets anders kan zijn dan 1. De eerste bewijzen van de priemgetalstelling lieten op zich wachten tot het einde van die eeuw, door Hadamard en De la Vallée-Poussin die verder bouwden op werk van m.n. Riemann. Hun bewijzen maken gebruik van complexe analyse (die toen nog volop in ontwikkeling was!) en bestaan uit de studie van de Riemann-zèta-functie:

Definitie 1.2 (Riemann-zèta-functie)**.** *Voor $\Re\mathrm{e}\, s > 1$ definiëren we de Riemann-zèta-functie*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert lokaal gelijkmatig op het halfvlak $\Re\mathrm{e}\, s > 1$, zodat deze reeks een holomorfe functie van s definieert.
Er blijkt een sterk verband te bestaan tussen de nulpunten van ζ (t.t.z. de analytische voortzetting ervan) en de priemgetalstelling. Schrijven we $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + R(x)$, dan is men (bv. met het oog op toepassingen in de getaltheorie) geïnteresseerd in de grootte van de restterm $R(x)$. Een veel betere benadering dan $\frac{x}{\log x}$ wordt gegeven door de logaritmische integraal:

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}.$$

Meer bepaald luidt het ultieme vermoeden:

Vermoeden 1.3 (Riemann-hypothese)**.** *Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een constante $C_\varepsilon > 0$ waarvoor*

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leqslant C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \textit{als } x \textit{ groot genoeg is.}$$

Men kan aantonen dat de Riemann-hypothese equivalent is aan de uitspraak dat de analytische voorzetting van ζ geen nulpunten heeft met reëel deel groter dan $\frac{1}{2}$.

Het doel van deze bachelorproef is om het verband te bestuderen tussen de nulpunten van de Riemann-zèta-functie en de restterm in de priemgetalstelling.

Doorheen deze uiteenzetting noteren we bijna altijd $\sigma = \Re\mathrm{e}\, s$ en $t = \Im\mathrm{m}\, s$. De reeksvoorstelling van ζ laat volgend elementair resultaat toe:

Stelling 1.4. *$\zeta(s)$ heeft geen nulpunten in het halfvlak $\sigma > 1$.*

Bewijs. Voor $\sigma > 1$ zijn de reeksen $\sum n^{-s}$ en $\sum \mu(n)n^{-s}$ absoluut convergent; door termen te herschikken bekomen we:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} \overset{N=nm}{=} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\sum_{nm=N} \mu(m)}{N^s}.$$

In Discrete Wiskunde I bewezen we dat $\sum_{nm=N} \mu(m) = \sum_{m|N} \mu(m) = 0$ als $N > 1$ (dit en andere eigenschappen worden herhaald in paragraaf 1.2.1). Het rechterlid is dus gelijk aan 1; i.h.b. zijn de factoren in het linkerlid niet nul. $\square$

(Lemma 2.12 geeft een alternatief bewijs.) In wat volgt zullen we de nulpunten van ζ in meer uitvoerig detail bestuderen.

1.1 Asymptotische analyse

We zullen zeer frequent gebruik maken van asymptotische notaties, waarvan we de definities (er zijn verschillende conventies in de omgang) hier herhalen.

Asymptotische gedrag op oneindig. Zij f en g functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$ gedefinieerd voor voldoende grote x. We noteren:

- $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \ll g(x)$ of $g(x) \gg f(x)$ indien $C, x_0 > 0$ bestaan met $|f(x)| \leqslant C\,|g(x)|$ voor $x \geqslant x_0$. Naar C wordt verwezen als de *impliciete constante* in de afschatting. We zeggen ook "'g majoreert f".
- $f(x) \asymp g(x)$ indien $f(x) \ll g(x)$ en $g(x) \gg f(x)$.
- $f(x) = o(g(x))$ indien $g(x) \neq 0$ voor x voldoende groot en $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- $f(x) \sim g(x)$ indien $g(x) \neq 0$ voor x voldoende groot en $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Enkele eigenschappen, die rechtstreeks volgen uit de definities:

- Als $f(x) = o(g(x))$, dan is $f(x) = O(g(x))$.
- $f(x) \sim g(x)$ a.s.a. $f(x) = g(x) + o(g(x))$.
- $\ll$ is transitief: Als $f(x) = O(g(x))$ en $g(x) = O(h(x))$, dan is $f(x) = O(h(x))$; iets informeler: $O(O(h(x)) = O(h(x))$. Als $g(x) \asymp h(x)$, dan is dus $f(x) = O(g(x))$ a.s.a. $f(x) = O(h(x))$.

Voorbeelden:

- $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \sim a_n x^n$ (als $a_n \neq 0$).
- Als P en Q veeltermen zijn van dezelfde graad, dan is $P(x) \asymp Q(x)$.
- $x^M = O(e^{\varepsilon x})$ voor alle $M, \varepsilon > 0$.
- $\log^M x = O(x^{\varepsilon})$ voor alle $M, \varepsilon > 0$.
- $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$

Asymptotisch gedrag in een punt. We gebruiken deze notaties ook voor het asymptotisch gedrag in een punt $x_0 \in \mathbb{R}$. De definities zijn analoog, met dien verstande dat "voor x voldoende groot" zich vertaalt als "voor x in een omgeving van x_0" en dat de limieten voor $x \to x_0$ worden genomen. We schrijven dan bijvoorbeeld $f(x) \asymp g(x)$ $(x \to x_0)$. Indien geen zo'n punt wordt gespecifieerd veronderstelt men de standaardinterpretatie, t.t.z. voor $x \to \infty$. Veel voorbeelden zijn gevallen van een algemeen resultaat omtrent taylorontwikkelingen: Als $f(x)$ van klasse C^n is rond x_0, dan is $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + O((x-x_0)^n)$, aangezien $f^{(n)}$ begrensd is (want continu) in een omgeving van x_0. Voorbeelden:

- $e^x = 1 + x + O(x^2)$ $(x \to 0)$
- $\log(1+x) = x + O(x^2)$ $(x \to 0)$

Ook geldt: als f een niet-nul limiet heeft in x_0, dan is $f \asymp 1$ $(x \to x_0)$. Hoewel een triviale observatie, levert dit nuttige resultaten, zoals: als f afleidbaar is in x_0 met $f'(x_0) \neq 0$, dan is $f(x) - f(x_0) \asymp x - x_0$ $(x \to x_0)$. Voorbeelden:

- $\frac{e^x - 1}{x} \asymp 1$, of dus $e^x - 1 \asymp x$ $(x \to 0)$
- $\frac{\log(1+x)}{x} \asymp 1$, of dus $\log(1+x) \asymp x$ $(x \to 0)$

Asymptotisch gedrag op oneindig in $\mathbb{C}$. Analoog als f en g functies van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$ zijn: in de definitie komt dan telkens "voor $|z|$ voldoende groot", en de limieten zijn voor $|z| \to \infty$. Eventueel kan een gebied worden gespecifieerd waarbinnen de afschatting geldig is. Voorbeelden:

- $|\log z| = |\log|z| + i \arg z| \sim \log|z|$. Bijgevolg is $\log z \asymp \log|z|$.
- Uit bovenstaande volgt $\log^M z \ll z^\varepsilon$ voor $M, \varepsilon > 0$.
- $z^M \ll e^{\varepsilon z}$ voor $M, \varepsilon > 0$, in elk gebied van de vorm $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$. Want daar is $\Im\mathrm{m}\, z \ll \Re\mathrm{e}\, z$ zodat $|z| \asymp \Re\mathrm{e}\, z$, dus $|z|^M \ll (\Re\mathrm{e}\, z)^M \ll e^{\varepsilon \Re\mathrm{e}\, z} \asymp e^{\varepsilon z}$ (waarbij de tweede relatie geldt omdat $\Re\mathrm{e}\, z \to \infty$ voor $|z| \to \infty$).

Asymptotisch gedrag in een punt van $\mathbb{C}$.

- Is f holomorf in z_0, dan is voor $n \in \mathbb{N}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + O(|z - z_0|^n)$
- Is f holomorf in een doorprikte omgeving van z_0, dan is $f(z) = O(|z - z_0|^n)$ $(z \to z_0)$ indien z_0 een nulpunt is met multiplicteit n en $f(z) = O(|z - z_0|^{-n})$ $(z \to z_0)$ indien z_0 een pool is van orde n. Indien de pool enkelvoudig is en residu A heeft is meer bepaald $f(z) \sim A/(z - z_0)$ $(z \to z_0)$.

Substitutie van afschattingen. Indien een asymptotische relatie geldt voor $x \to \infty$, dan geldt ze ook door voor x een functie te substitueren die naar ∞ nadert. Voorbeelden:

- $x^M \ll e^{\varepsilon x}$, dus (via $x = \log^A t$, $t \to \infty$) $(\log t)^M \ll e^{\varepsilon (\log t)^A}$ voor alle $M, \varepsilon, A > 0$
- $x^M \ll e^{\varepsilon x}$, dus (via $x = -\log t$, $t \to 0^+$) $(\log t)^M \ll t^\varepsilon$ voor alle $M, \varepsilon > 0$ $(t \to 0^+)$

Analoog voor substitutie in afschattingen in een punt; voorbeelden:

- $e^z = 1 + O(|z|)$ $(x \to 0)$, dus als $f(z) = o(1)$ is $e^{f(z)} = 1 + O(|f(z)|)$. Zo is bijvoorbeeld $e^{1/z} = 1 + O(1/|z|)$ $(|z| \to \infty)$
- Analoog is $\log(1 + f(z)) = O(|f(z)|)$ als $f(z) = o(1)$. Zo is bijvoorbeeld $\log(1 + 1/z) = O(1/|z|)$ of nog, $1 + 1/z = e^{O(1/|z|)}$ $(|z| \to \infty)$

Deze laatste twee voorbeelden impliceren dat een term of factor $1 + O(1/|z|)$ mag worden vervangen door $e^{O(1/|z|)}$, en vice versa.

Parameterafhankelijke afschattingen. Indien een asymptotische relatie gekend is voor een functie die afhangt van een parameter die de impliciete constante in de O-term beïnvloedt, wordt deze als index meegegeven. Zo is $x^M = O_M(e^x)$ voor $M > 0$. Indien de impliciete constante begrensd blijft in functie van de parameter, kan de constante gelijk gekozen worden voor alle parameterwaarden en is zo'n index overbodig. Zo is, zolang M begrensd is (bv. $M < 10$), $x^M = O(e^x)$ uniform in M.

Uniforme afschattingen en andere conventies. Sommige auteurs definiëren $f(x) = O(g(x))$ a.s.a. $C > 0$ bestaat met $|f(x)| \leqslant C\,|g(x)|$ voor alle $x \geqslant 1$ (of in een ander gespecifieerd gebied), en dus niet "voor voldoende grote x". De O-afschatting geldt m.a.w. "uniform". In de praktijk maakt dit echter weinig verschil: indien f begrensd is voor $x \geqslant 1$ en $\inf_{x\in[1,x_0]} |g(x)| > 0$ voor alle $x_0 > 0$, volgt de sterkere voorwaarde uit de zwakke: het volstaat immers om C desnoods te vergroten tot $\sup_{x\in[1,x_0]} \frac{f(x)}{g(x)}$. Een mogelijke reden om de alternatieve definitie te gebruiken is dat ze zich eenvoudig leent tot sommeren en integreren van O-afschattingen: is $f(x) = O(g(x))$ voor $x \geqslant 1$ en $g(x) > 0$, dan is $\int_1^x f(t)dt \leqslant \int_1^x Cg(t)dt$, zodat $\int_1^x f = O\left(\int_1^x g\right)$ (waarbij C de impliciete constante is). Zoals we in de volgende paragraaf bespreken, mogen O-afschattingen echter ook geïntegreerd worden onder de zwakke definitie. Omdat het in de praktijk omslachtig is om ongelijkheden geldig te maken voor alle $x \geqslant 1$ (en niet zomaar voor x voldoende groot) blijven we bij de oorspronkelijke definitie. Desalniettemin is het zinvol om in het achterhoofd te houden dat veel afschattingen m.b.t. de zwakke definitie ook uniform gelden, en dus niet zomaar voor voldoende grote of kleine x:

- Is f holomorf in $\bar{B}(z_0, R)$, dan is voor $n \in \mathbb{N}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + O(|z - z_0|^n)$ uniform in $\bar{B}(z_0, R)$. De functie $\left(f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0)\right)/(z - z_0)^n$ is immers continu in $\bar{B}(z_0, R)$ (op een ophefbare discontinuïteit na), zodat het begrensd (d.i. $O(1)$) is in heel $\bar{B}(z_0, R)$.

Integratie van afschattingen. We beweren dat we grote O's en integralen mogen wisselen. Veronderstel $g(x) > 0$ voor $x \geqslant 0$ en zij $f(x) = O(g(x))$, m.a.w. $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ voor $x \geqslant x_0$ $(C > 0)$. Stel $F(x) = \int_0^x f$ en $G(x) = \int_0^x g$. Dan is voor $x \geqslant x_0$, $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f \leqslant F(x_0) + C\int_{x_0}^x g = F(x_0) - CG(x_0) + CG(x)$. Aangezien G stijgend is voor $x \geqslant 0$, is

$$\frac{|F(x)|}{G(x)} \leqslant \frac{|F(x_0) - CG(x_0)|}{G(x)} + C \leqslant \frac{|F(x_0) - CG(x_0)|}{G(x_0)} + C$$

zodat $F(x) = O(G(x))$. Merk nog op dat we de voorwaarde $g(x) > 0$ voor $x \geqslant 0$ mogen verzwakken tot $g(x) > 0$ voor x voldoende groot indien we eisen dat $\liminf_{x\to\infty} G(x) > 0$ (want dan is de eerste term in bovenstaande ongelijkheid begrensd); i.h.b. volstaat het dat $G(x) \to \infty$. In de praktijk zijn deze voorwaarden vaak voldaan.

1.2 Arithmetische functies

We presenteren kort twee klassen van methodes om problemen in de (analytische) getaltheorie naar elkaar te vertalen. De eerste, Dirichlet-convolutie, is zuiver algebraïsch van aard.

Definitie 1.5. *Een arithmetische functie f is een functie van $\mathbb{N}^+$ naar $\mathbb{C}$. We noemen f mutiplicatief als $f(ab) = f(a)f(b)$ indien $\operatorname{ggd}(a, b) = 1$, en totaal multiplicatief als dit geldt voor alle a, b.*

1.2.1 Dirichlet-convolutie

Definitie 1.6. *Zij f en g arithmetische functies. Hun Dirichlet-convolutie, genoteerd $f * g$ is de arithmetische functie bepaald door*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

waarbij de som loopt over de positieve delers van n.

In Discrete Wiskunde I bewezen we dat $*$ commutatief en associatief is, dat ε (gedefinieerd door $\varepsilon(1) = 1$ en 0 anders) een eenheidselement is voor $*$, dat f inverteerbaar is a.s.a. $f(1) \neq 0$, dat de convolutie en inverse van multiplicatieve functies terug multiplicatief zijn en dat $\mu * \mathbf{1} = \varepsilon$, waarbij $\mathbf{1}$ gedefinieerd is door $\mathbf{1}(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$.
Dirichlet-convolutie is erg bruikbaar voor het bewijzen van asymptotische formules voor arithmetische functies (zie bv. [4, §2.4]), maar dergelijke toepassingen behandelen we hier niet.

Definitie 1.7 (Von Mangoldt-functie)**.** *We definiëren $\Lambda(n) = 0$ als n geen priemmacht is, en $\Lambda(n) = \log p$ indien $n = p^m$, p priem.*

Stelling 1.8. $\Lambda = \log * \mu$

Bewijs. Zie [4, Theorem 1.6, p. 29]. □

1.2.2 Sommatieformules

De sommatieformules van Abel en Euler laten bv. toe om een continu afleidbare functie in een som weg te halen of toe te voegen.

Stelling 1.9 (Sommatieformule van Abel)**.** *Zij a_n een rij complexe getallen en $f \in C^1[x, y]$. Dan is*

$$\sum_{x<n\leqslant y} a_n f(n) = A(y)f(y) - A(x)f(x) - \int_x^y A(t)f'(t)dt$$

waarbij $A(t) = \sum_{n\leqslant t} a_n$. Ook is (als $f \in C^1[1, x]$)

$$\sum_{n\leqslant x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt.$$

Bewijs. Zie [4, Theorem 2.10, p. 56]. □

Stelling 1.10 (Sommatieformule van Euler). *Zij $f \in C^1[x, y]$. Dan is*

$$\sum_{x<n\leqslant y} f(n) = \int_x^y f(t)dt + \int_x^y \{t\} f'(t)dt - \{y\} f(y) + \{x\} f(x).$$

Ook is (als $f \in C^1[1, x]$)

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \int_1^x f(t)dt + \int_1^x \{t\} f'(t)dt - \{x\} f(x) + f(1).$$

Bewijs. Zie [4, Theorem 2.3, Corollary 2.4, pp. 50–51]. □

Hierbij is $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ het zogeheten *fractioneel deel* van x.

1.2.3 De Chebyshev-functies

Definitie 1.11. *De eerste Chebyshev functie $\theta(x)$ is een gewogen variant van $\pi(x)$:*

$$\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p.$$

De tweede Chebyshev functie $\psi(x)$ is

$$\psi(x) = \sum_{p^k\leqslant x} \log p = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) = \log(\mathrm{kgv}(1, \ldots, \lfloor x \rfloor)) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{1/k}).$$

(Merk op dat $\sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{1/k})$ een eindig aantal termen heeft in de zin dat $\theta(x^{1/k}) = 0$ voor $k > \log_2 x$.) De reden waarom men θ en ψ bestudeert is dat ze (i.h.b. ψ) eenvoudiger te bestuderen zijn. Zo is $\psi(x)$ veel nauwer verwant aan de Riemann-zèta-functie dan $\pi(x)$.

Stelling 1.12 (Chebyshev). *$\psi(x) \asymp x$.*

Bewijs. Zie [7, Theorem 2.4, p. 46]. □

Stelling 1.13. *$\psi(x) - \theta(x) = O(\sqrt{x})$.*

Bewijs.[1] Aangezien $\theta(x) \leqslant \psi(x) \ll x$ is

$$|\psi(x) - \theta(x)| = \theta(x^{1/2}) + \sum_{k\geqslant 3} \theta(x^{1/k}) \ll \sqrt{x} + x^{1/3} \log x \ll \sqrt{x}$$

waarbij we in de eerste afschatting gebruiken dat $\theta(x) \ll x$ uniform voor $x \geqslant 2$. □

Stelling 1.14 (Equivalente formuleringen van de priemgetalstelling). *Zij $R(x) \gg \sqrt{x}$, dan zijn de volgende equivalent:*

- *$\theta(x) = x + O(R(x))$*
- *$\psi(x) = x + O(R(x))$.*

Indien $R(x)$ continu afleidbaar, positief en stijgend is, impliceren deze ook

[1] [7, Corollary 2.5, p. 49]

- $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(R(x)/\log x)$

en indien $R(x)/\log x$ stijgend is, geldt de omgekeerde implicatie.

Bewijs. De eerste twee zijn equivalent wegens Stelling 1.13. Stel dat $\theta(x) = x + O(R(x))$. Wegens de sommatieformule van Abel (Stelling 1.9) is, met $a_n = \log n$ als n priem is en 0 anders (voor $x \geqslant 3$),

$$\begin{aligned}\pi(x) = 1 + \sum_{2<n\leqslant x} \frac{a_n}{\log n} &= 1 + \frac{\theta(x)}{\log x} - \frac{\theta(2)}{\log 2} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt \\ &= \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{R(x)}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt + \int_2^x \frac{tdt}{t\log^2 t}.\end{aligned}$$

We schatten de twee integralen af: we hebben

$$\int_2^x \frac{tdt}{t\log^2 t} = \left[\frac{-t}{\log t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\log t} = O(1) - \frac{x}{\log x} + \mathrm{Li}(x)$$

en

$$\int_2^x \frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt = O\left(\int_2^x \frac{R(t)}{t\log^2 t}dt\right).$$

Partiële integratie levert

$$0 \leqslant \int_2^x \frac{R(t)}{t\log^2 t}dt = \left[\frac{R(t)}{\log t}\right]_2^x - \int_2^x \frac{R'(t)}{\log t}dt \leqslant \frac{R(x)}{\log x}$$

(waarbij we gebruiken dat $R'(t) \geqslant 0$) zodat $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(R(x)/\log x)$.
Omgekeerd is, met $b_n = 1$ als n priem is en 0 anders,

$$\begin{aligned}\theta(x) = \sum_{n\leqslant x} b_n \log n &= \pi(x)\log x - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}dt \\ &= \mathrm{Li}(x)\log x + O(R(x)) - \int_2^x \frac{\mathrm{Li}(t)}{t}dt + O\left(\int_2^x \frac{R(t)/\log t}{t}dt\right).\end{aligned}$$

Wegens partiële integratie is

$$\int_2^x \frac{\mathrm{Li}(t)}{t}dt = [\mathrm{Li}(t)\log t]_2^x - (x-2)$$

en

$$0 \leqslant \int_2^x \frac{R(t)/\log t}{t}dt = [R(t)]_2^x - \int_2^x \left(\frac{R(t)}{\log t}\right)' \cdot \log t \, dt \leqslant R(x),$$

waarbij we gebruiken dat $(R(t)/\log t)' \geqslant 0$. Samentellen levert $\theta(x) = x + O(R(x))$. □

Uit het bewijs blijkt ook dat het voor de implicaties volstaat dat $R(x)$ en $R(x)/\log x$ stijgend zijn voor voldoende grote x.

2 Lemmata in de complexe analyse

2.1 De logaritmische afgeleide

Al te vaak zullen logaritmische afgeleiden van complexwaardige functies opduiken. Hoewel geen moeilijk begrip, presenteren we in deze subsectie enkele eigenschappen.

Definitie 2.1. *Zij $f : D \to \mathbb{C}$ een meromorfe functie. De* logaritmische afgeleide van f *is de meromorfe functie $\mathfrak{L}f(z) = f'(z)/f(z)$. Ze is gedefinieerd in de punten waar f gedefinieerd en niet-nul is.*

Uit de rekenregels voor afgeleiden volgt eenvoudig:

Eigenschap 2.2. *Als $f, g : D \to \mathbb{C}$ meromorf zijn, dan is $\mathfrak{L}(fg) = \mathfrak{L}f + \mathfrak{L}g$.*

I.h.b. zien we dat $\mathfrak{L}(cf) = \mathfrak{L}f$ voor $c \in \mathbb{C}$. Deze eigenschap veralgemeent vanzelfsprekend naar producten met een willekeurig eindig aantal factoren. In Stelling 4.14 tonen we aan dat ze (onder bepaalde voorwaarden) ook geldig is voor oneindige producten.

Eigenschap 2.3. *Als $f : D \to \mathbb{C}$ meromorf is, dan geldt: de polen van $\mathfrak{L}f$ zijn de nulpunten en polen van f; meer bepaald geldt:*

- *als f een nulpunt met multipliciteit m heeft in z_0, dan heeft $\mathfrak{L}f$ een pool van orde 1 in z_0 met residu m;*
- *als f een pool van orde m heeft in z_0, dan heeft $\mathfrak{L}f$ een pool van orde 1 in z_0 met residu $-m$.*

I.h.b. heeft elke pool van $\mathfrak{L}f$ orde 1, en is $\mathfrak{L}f$ holomorf zodra f holomorf en niet-nul is.

Voorbeelden zijn:

$$\mathfrak{L}(az+b) = \frac{1}{z+b/a} \qquad \text{en} \qquad \mathfrak{L}\frac{1}{az+b} = \frac{-1}{z+b/a} \quad (a \neq 0). \tag{2.1}$$

Uit de rekenregels volgt nu

$$\mathfrak{L}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{z+b/a} - \frac{1}{z+d/c} \quad (a, c \neq 0).$$

Stelling 2.4 (Primitieven van logaritmische afgeleiden)**.** *Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ een open gebied zonder gaten en $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf en niet-nul in D, en zij $z_0 \in D$. De functie $g : D \to \mathbb{C} : z \mapsto \int_{z_0}^{z} \mathfrak{L}f$ is holomorf op D en voldoet aan:*

- $g(z_0) = 0$
- $g' = \mathfrak{L}f$
- $f(z) = f(z_0)e^{g(z)}$
- $\Re\mathrm{e}\, g(z) = \log|f(z)| - \log|f(z_0)|$.

Bewijs. Omdat $\mathfrak{L}f$ holomorf is op D, is $g(z)$ holomorf op D, met $g(z_0) = 0$ en $g' = \mathfrak{L}f$. Er geldt

$$\left(\frac{e^g}{f}\right)' = \frac{g'e^g f - e^g f'}{f^2} = 0,$$

dus $e^{g(z)}/f(z) = e^{g(z_0)}/f(z_0) = 1/f(z_0)$ zodat de derde bewering geldt. De laatste bewering volgt uit $e^{\Re\mathrm{e}\, g(z)} = \left|e^{g(z)}\right| = |f(z)/f(z_0)|$. □

2.2 Dirichletreeksen

Definitie 2.5. *Zij $f(n)$ een arithmetische functie, dan definiëren we de Dirichletreeks $F(s)$ van f als*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Men kan de Dirichletreeks beschouwen als formele reeks, of als complexwaardige functie in het deel van $\mathbb{C}$ waar ze convergeert.

2.2.1 Analytische eigenschappen

Wat betreft de convergentie hebben we volgend sterk resultaat:

Stelling 2.6 (Abscissa van convergentie van Dirichletreeksen)**.** *Zij $F(s)$ een Dirichletreeks, dan bestaan $\sigma_a, \sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (genaamd de abscis van absolute convergentie en abscis van convergentie) waarvoor:*

- *$F(s)$ convergeert lokaal gelijkmatig absoluut voor $\sigma > \sigma_a$ en convergeert niet absoluut als $\sigma < \sigma_a$;*
- *$F(s)$ convergeert lokaal gelijkmatig voor $\sigma > \sigma_c$ en convergeert niet als $\sigma < \sigma_c$;*
- *$\sigma_a - 1 \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_a$.*

Bewijs. Zie [4, Theorems 4.4, 4.6, pp. 116-117]. □

Over de convergentie op de rechten $\sigma = \sigma_a$ en $\sigma = \sigma_c$ is er geen uitsluitsel. We merken nog een analogie op met de convergentie van machtreeksen: Een machtreeks $\sum a_n z^n$ heeft een convergentiestraal R waarvoor de machtreeks lokaal gelijkmatig absoluut convergeert in $|z| < R$ en niet convergeert voor $|z| > R$. De stralen van absolute en gewone convergentie vallen hier samen. Op de rand van de convergentieschijf is het convergentiegedrag niet zomaar te bepalen. Merk verder op dat, net zoals bij machtreeksen, de abscissa van convergentie in theorie af te leiden zijn uit het convergentiegedrag voor reële waarden.

Stelling 2.7 (Analyticiteit van Dirichletreeksen)**.** *Zij $F(s)$ een Dirichletreeks met abscis van convergentie σ_c. Op het halfvlak van convergentie $\sigma > \sigma_c$ is $F(s)$ holomorf, is $F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}\log n$ en heeft $F'(s)$ (beschouwd als Dirichletreeks van de arithmetische functie $-f(n)\log n$) dezelfde abscis van convergentie en absolute convergentie.*

Bewijs. Zie [4, Theorem 4.7, p. 119]. □

$\zeta(s)$ heeft, als Dirichletreeks van de constante functie 1, abscissa $\sigma_a = \sigma_c = 1$: voor reële s reduceert het convergentievraagstuk zich immers tot de convergentie van de hyperharmonische reeks $\sum n^{-\sigma}$, die (absoluut) convergeert a.s.a. $\sigma > 1$.

2.2.2 Algebraïsche eigenschappen en voorbeelden

Stelling 2.8 (Dirichletreeks van een Dirichlet-convolutie)**.** *Zij f en g arithmetische functies en $h = f * g$, met bijhorende Dirichletreeksen F, G en H. Indien $F(s)$ en $G(s)$ absoluut convergeren, dan convergeert ook $H(s)$ absoluut en is $H(s) = F(s)G(s)$. Zijn $\sigma_f, \sigma_g, \sigma_h$ hun abscissa van absolute convergentie, dan is dus $\sigma_h \leqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$.*

Bewijs. Zie [4, Theorem 4.1, p. 108]. □

Stelling 2.9 (Dirichletreeks van de Von Mangoldt-functie)**.** Λ *heeft Dirichletreeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$

die holomorf is en lokaal gelijkmatig absoluut convergeert voor $\sigma > 1$*.*

Bewijs. Er geldt $\Lambda = \log * \mu$ (Stelling 1.8). De Dirichletreeks van $\log(n)$ is $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \log n = -\zeta'(s)$ met abscis van absolute convergentie gelijk aan 1, wegens Stelling 2.7. De Dirichletreeks $\sum \mu(n) n^{-s}$ van μ heeft duidelijk abscis van absolute convergentie hoogstens 1 en is gelijk aan $1/\zeta(s)$ wegens Stelling 2.8, gelet op $\mu * \mathbf{1} = \varepsilon$. Het beweerde volgt nu uit Stelling 2.8. $\square$

Stelling 2.10 (Logaritme van de zèta-functie)**.** *De Dirichletreeks*

$$\log \zeta(s) := \sum_{p^m} \frac{1}{m p^{ms}} \tag{2.2}$$

convergeert lokaal gelijkmatig absoluut in het halfvlak $\sigma > 1$*, en heeft er afgeleide* $\zeta'(s)/\zeta(s)$*.*

Bewijs. Dat $\sigma_a \leqslant 1$ geldt wegens $1/(mp^{m\sigma}) \leqslant 1/p^{m\sigma}$. Wegens Stelling 2.7 is nu $(\log \zeta(s))' = -\sum_{p^m} \log(p^m)/(mp^{ms}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} = \zeta'(s)/\zeta(s)$ voor $\sigma > 1$. $\square$

Gebruik makend van Stelling 2.4 heeft de Dirichletreeks (2.2) een analytische uitbreiding in elk open gebied zonder gaten waarin ζ'/ζ holomorf is, d.i. waar ζ holomorf en niet-nul is: de primitieve van ζ'/ζ die Stelling 2.4 geeft is immers noodzakelijk gelijk aan $\log \zeta$ (op een constante na) aangezien ze dezelfde afgeleide hebben.

2.2.3 Eulerproducten

Stelling 2.11. *Zij* f *een multiplicatieve functie met Dirichletreeks* F*. Indien* $F(s)$ *absoluut convergeert voor zekere* s*, dan is*

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}}\right)$$

(het product gaande over de priemgetallen) en dit product convergeert absoluut.

Bewijs. Zie [4, Theorem 4.3, p. 111]. $\square$

Een oneindig product definieert men als de limiet van de partieelproducten, als die limiet bestaat. Met de absolute convergentie van het product bedoelen we dat $\prod_p \left(1 + \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}}\right|\right)$ convergeert. Waarom we dit zo definiëren en wat de implicaties hiervan zijn, wordt verduidelijkt in 4.1.1. Voorlopig is het enkel van belang te weten dat absolute waarde-strepen binnen het product mogen worden gebracht, en dat als het product niet 0 is en alle termen reëel zijn, de logaritme ervan gelijk is aan de reekssom van de logaritmen van de factoren (een direct gevolg van de definitie).
Het meest befaamde voorbeeld van een Eulerproduct is wellicht dat van $\zeta(s)$: voor $\sigma > 1$ is

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms}\right) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}. \tag{2.3}$$

Lemma 2.12. *Voor $\sigma > 1$ is*

$$|\zeta(s)| \geqslant \prod_p \frac{1}{1+p^{-\sigma}} > 0.$$

ζ heeft dus geen nulpunten in het halfvlak $\sigma > 1$.

Bewijs. De eerste ongelijkheid volgt uit het het Eulerproduct (2.3). Aangezien $\log(1+x) = O(x)$ (voor bijv. $0 \leqslant x \leqslant 1$) is

$$\log \prod_p \frac{1}{1+p^{-\sigma}} = O\left(\sum_p p^{-\sigma}\right) = O(\zeta(\sigma)) < \infty$$

zodat de tweede ongelijkheid geldt. □

2.2.4 Perronformules

Het uiteindelijke doel is om asymptotische formules te verkrijgen voor sommen van de vorm $\sum_{n\leqslant x} f(n)$. De benaming *Perronformule* wordt algemeen gebruikt voor formules die de partieelsommen van een arithmetische functie uitdrukken in functie van haar Dirichletreeks.
Hoewel Stelling 2.13 ook een exacte Perronformule geeft (zonder restterm) gaat de voorkeur naar uitdrukkingen met restterm, met het oog op verdere analyse.
We noteren kort $M(f,x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$ voor een arithmetische functie f en $x > 0$.

Stelling 2.13 (Perronformule voor $M(f,x)$)**.** *Zij f een arithmetische functie met Dirichletreeks $F(s)$ die absoluut convergeert voor $\sigma > \sigma_a$. Dan is voor $c > \max(0, \sigma_a)$, $T > 0$ en $x > 0$,*

$$M(f,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} F(s)\frac{x^s}{s}ds + R(T) + \delta(T,x) \tag{2.4}$$

waarbij $\delta(T,x) = \frac{1}{2}f(x) + o_{c,x}(1)$ als $x \in \mathbb{N}$ en $\delta(T,x) = 0$ anders, en

$$|R(T)| \leqslant \frac{x^c}{\pi T}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq x}}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c\,|\log(x/n)|} = O_{c,x}\left(\frac{1}{T}\right). \tag{2.5}$$

I.h.b. is dus $M(f,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^s s^{-1}ds$ ($x \notin \mathbb{N}$) en $M(f,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^s s^{-1}ds + \frac{1}{2}f(x)$ ($x \in \mathbb{N}$).

Perronformules geven heel duidelijk het verband tussen de partieelsommen van f en analytische eigenschappen (meer bepaald, de polen) van $F(s)$: vervormen van de contour laat toe de bijdragen van de polen van $F(s)$ rechtstreeks te vertalen naar de groei van de partieelsommen. Het is dus niet zo verrassend (maar niet minder spectaculair!) dat een expliciete formule voor $\psi(x)$ bestaat in termen van de nulpunten van ζ; zo kan men aantonen dat (zie bv. [5, Theorem 29, p. 77]

$$\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) \quad (x \notin \mathbb{N})$$

waarbij de som gaat over de nulpunten ρ van ζ in de strook $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ (de nulpunten van ζ bestuderen we in paragraaf 4.3), geordend volgens stijgende modulus.

Merk op dat de bovengrens op de restterm $R(T)$ onbrensd groot wordt als x dicht bij een natuurlijk getal komt te liggen. Stelling 2.13 is dan ook het krachtigst als $x = N + 1/2$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$. Door iets voorzichtiger om te gaan met de afschattingen in het bewijs, is het wel mogelijk om niet-divergente resttermen te krijgen voor natuurlijke waarden van x; zie bijv. [7, Corollary 5.3, p. 140]. Een dergelijk resultaat hebben we hier echter niet nodig.
Deze Perronformule laat ook uitschijnen waarom de vorm van een nulpuntvrij gebied voor ζ in verband staat met de restterm in de priemgetalstelling: nemen we het geval $f = \Lambda$, zodat $F = -\zeta'/\zeta$. De contour in de Perronformule kan omgevormd worden over elk gebied waar het gedrag van $F(s)$ gekend is (d.w.z. waar de polen en nulpunten van ζ gekend zijn). Gegeven een nulpuntvrij gebied kan de contour dus zonder veel moeite gekozen worden zo dat $|x^s/s|$ kleiner is. Hieraan is meteen ook te zien hoe de formule die het nulpuntvrij gebied beschrijft in verband staat met de exponent in de restterm van de priemgetalstelling. In de volgende secties construeren we zo'n nulpuntvrij gebied van ζ, waarna we deze analytische informatie over ζ'/ζ via de Perronformule zullen omzetten tot informatie over $\psi(x) = M(\Lambda, x)$ (in Stelling 5.6). De reden waarom we met de Dirichletreeks van Λ, en niet bijvoorbeeld die van π werken, is dat de uitdrukking voor de Dirichletreeks van Λ veel eenvoudiger is. Het is wel zo dat de techniek voor andere arithmetische functies kan worden toegepast, indien de Dirichletreeks ervan gekend is (bv. in functie van ζ).

Bewijs.[2] Zij $T > 0$. Ons doel is om reeks en integraal te verwisselen in

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} F(s)\frac{x^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)x^s}{sn^s}ds.$$

Daartoe volstaat het dat de reeks gelijkmatig convergent is op de contour, hetgeen volgt uit $\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(n)x^s}{sn^s}\right| = \frac{x^c}{T}\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right|$ en het feit dat $F(s)$ er gelijkmatig convergeert (daar $c > \sigma_c$; merk dus op dat we hier niet de *absolute* convergentie van $F(s)$ nodig hebben). We bekomen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{(x/n)^s}{s}ds$$

zodat het volstaat deze integralen af te schatten. Lemma 2.14 geeft (gelet op $c > 0$) precies de beweerde restterm. (De term $M(f,x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$ is dus afkomstig van de integralen met $n < x$.) Merk op dat de bovengrens op de restterm eindig is aangezien $F(s)$ absoluut convergeert ($c > \sigma_a$, en de factor $1/|\log(x/n)| \ll_x 1/\log n$ beïnvloedt de abscis van absolute convergentie niet), zodat de limietgedaanten voor $T \to \infty$ geldig zijn voor $c > \sigma_a$. □

Lemma 2.14. *Stel voor $c, T, y > 0$,*

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}ds.$$

Dan geldt:

$$\begin{cases} |I(y,T,c) - 1| \leqslant \dfrac{y^c}{\pi T\log y} & \text{als } y > 1 \\ |I(y,T,c)| \leqslant \dfrac{y^c}{\pi T|\log y|} & \text{als } 0 < y < 1 \\ |I(1,T,c)| = \frac{1}{2} + o_c(1) & (T \to \infty) \end{cases} \tag{2.6}$$

[2] [4, Theorem 4.17, p. 136]

Deze afschattingen kunnen als verklaring dienen voor het precieze integrandum in de Perron-formule: de integraal filtert a.h.w. de waarden van y die groter zijn dan 1, en laat dus toe om, op een restterm na, de partieelsommen van f te bekomen uit de reekssom van een zekere integraal door de getallen $n > x$ eruit te filteren.

Bewijs.[3] Voor $y = 1$ is

$$I(y,T,c) = \frac{1}{2\pi i}(\log(c+iT) - \log(c-iT)) = \frac{1}{\pi}\arg(c+iT)$$
$$= \frac{1}{\pi}\arctan(T/c) = 1/2 + o_c(1).$$

Stel $y > 1$. De functie y^s/s is holomorf in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ en heeft een pool met residu 1 in 0. Wegens de residustelling is voor $b < 0$,

$$I(y,T,c) - I(y,T,b) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{c-iT} + \int_{c+iT}^{b+iT}\right)\frac{y^s}{s}ds.$$

De laatste twee termen zijn in absolute waarde beide hoogstens

$$\frac{1}{2\pi}\int_{b\pm iT}^{c\pm iT}\frac{y^\sigma}{|s|}d\sigma \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_b^c \frac{y^\sigma}{T}d\sigma \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^c \frac{y^\sigma}{T}d\sigma = \frac{y^c}{2\pi T\log y}.$$

Voor $b \to -\infty$ is (bij vaste T en y) $I(y,T,b) \to 0$ aangezien het integrandum begrensd is door

$$\left|\frac{y^s}{s}\right| \leqslant \frac{y^b}{|b|} \to 0.$$

Het gestelde volgt dus door $b \to -\infty$ te nemen.
Stel nu $0 < y < 1$, dan is wegens de residustelling voor $b > c$,

$$I(y,T,c) - I(y,T,b) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{c-iT} + \int_{c+iT}^{b+iT}\right)\frac{y^s}{s}ds.$$

De laatste twee termen zijn in absolute waarde beide hoogstens

$$\frac{1}{2\pi}\int_c^\infty \frac{y^\sigma}{T}d\sigma = \frac{y^c}{2\pi T\,|\log y|},$$

en voor $b \to \infty$ is opnieuw $I(y,T,b) \to 0$ aangezien het integrandum begrensd is door

$$\left|\frac{y^s}{s}\right| \leqslant \frac{y^b}{b} \to 0.$$

□

Aangezien we uiteindelijk de restterm $R(T)$ in verband willen brengen met $F(s)$, werken we de factor $|\log(x/n)|$ in de noemer weg in (2.5). Voor $0 < y \leqslant 1$ is $|\log y| = \int_y^1 t^{-1}dt \geqslant 1 - y$, dus:

$$|\log(x/n)| \geqslant \begin{cases} 1 - \frac{x}{n} & \text{als } x/n \leqslant 1 \\ 1 - \frac{n}{x} & \text{als } x/n \geqslant 1 \end{cases}$$
$$\geqslant \frac{|x-n|}{x}.$$

[3] [4, Lemma 4.15, p. 134]

Er volgt dat

$$
\begin{aligned}
|R(T)| \leqslant \frac{x^c}{\pi T} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq x}}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c |\log(x/n)|} &\leqslant \sum_{\substack{x/2<n<2x \\ n \neq x}} \frac{x^{c+1} |f(n)|}{\pi T n^c |x-n|} + \frac{x^c}{\pi T \log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} \\
&\leqslant \frac{2^c}{\pi T} \sum_{\substack{x/2<n<2x \\ n \neq x}} |f(n)| \frac{x}{|x-n|} + \frac{x^c}{\pi T \log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

aangezien $|\log(x/n)| \geqslant \log 2$ als $n \leqslant x/2$ of $n \geqslant 2x$.

2.3 Enkele ongelijkheden voor holomorfe functies

Wanneer we het zullen hebben over de nulpunten van (functies gerelateerd aan) de ζ-functie is Jensens ongelijkheid van belang. Ze legt een verband tussen het het aantal nulpunten van een holomorfe functie en diens groei.

Stelling 2.15 (Jensens ongelijkheid)**.** *Zij $f(z)$ holomorf voor $|z| \leqslant R$ en $f(0) \neq 0$. Als $|f(z)| \leqslant M$ voor $|z| \leqslant R$, dan is voor $0 < r < R$ het aantal nulpunten (met multipliciteit) in de schijf $|z| \leqslant r$ hoogstens*

$$\frac{\log(M/|f(0)|)}{\log(R/r)}.$$

Bewijs.[4] Veronderstel eerst dat f geen nulpunten met modulus R heeft. Noem $z_1, \ldots, z_K$ de nulpunten (met multipliciteit) van f in $|z| \leqslant R$. Stel

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^{K} \frac{R^2 - z\overline{z_k}}{R(z - z_k)}.$$

De functie $g(z)$ is holomorf voor $|z| \leqslant R$, en voor $|z| = R$ is

$$\left|R^2 - z\overline{z_k}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{R}(R^2 - z\overline{z_k})\right| = \left|R\overline{z} - \frac{1}{R}|z|^2\,\overline{z_k}\right| = |R(z - z_k)|,$$

en dus $|g(z)| = |f(z)| \leqslant M$. Wegens het maximumprincipe is i.h.b. $|g(0)| \leqslant M$. Maar

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{k=1}^{K} \frac{R}{|z_k|}.$$

en elke factor in dit product is $\geqslant 1$, en voor $|z_k| \leqslant r$ is de factor in dit product minstens R/r. Indien er L zo'n nulpunten zijn (met multipliciteit), moet dus

$$M \geqslant |g(0)| \geqslant |f(0)| \left(\frac{R}{r}\right)^L,$$

zodat $L \leqslant \log(M/|f(0)|)/\log(R/r)$.
Indien f nulpunten heeft met modulus R, dan heeft (wegens eenduidigheid van holomorfe functies) f geen nulpunten met modulus $R + \varepsilon$, voor $\varepsilon > 0$ klein genoeg. Het gestelde volgt nu door de limiet $\varepsilon \to 0$ te nemen. ☐

[4] [7, Lemma 6.1, p. 168]

Uit het bewijs blijkt de noodzaak om met de twee radii r en R te werken: pas dan hebben we een afschatting van de vorm $R/|z_k| \geqslant A > 1$, terwijl een afschatting $R/|z_k| \geqslant 1$ geen zinvolle ondergrens geeft op de bijdrage van de factoren.
Wanneer we het zullen hebben over sommen van de vorm $\sum_\rho (z-\rho)^{-1}$ en we enkel vat hebben op het reëel deel van de ρ, zal volgende ongelijkheid toelaten om conclusies te trekken over de modulus van de betrokken functies.

Lemma 2.16 (Borel-Carathéodery)**.** *Zij $f(z)$ holomorf voor $|z| \leqslant R$ en $f(0) = 0$. Als $\Re\mathrm{e}\, f(z) \leqslant M$ voor $|z| \leqslant R$, dan is voor $|z| < R$,*

$$|f(z)| \leqslant \frac{2M\,|z|}{R-|z|}$$

en voor $k > 0$,

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leqslant \frac{2MRk!}{(R-|z|)^{k+1}}.$$

Merk hierbij op dat $1/(R-|z|)$ en $|z|/(R-|z|)^{k+1}$ stijgende functies zijn in $|z|$. We zullen Lemma 2.16 vaak toepassen op translaties van functies, d.i. voor cirkels met centrum z_0; om dan $f(0) = 0$ te garanderen volstaat het $f(z_0)$ van f af te trekken.

Bewijs. [5] De strategie is om een afschatting te verkrijgen op de taylorcoëfficiënten van f, waarna de beweerde afschattingen volgen door sommatie. Stel $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ (voor $|z| \leqslant R$). Wegens de residustelling is

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} f(z) z^{-n-1} dz. \tag{2.8}$$

Ook is

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=R} \overline{f(z)} z^{-n-1} dz &= iR^{-n}\int_0^{2\pi} \overline{f(Re^{i\theta})} e^{-ni\theta} d\theta \\
&= iR^{-n}\overline{\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) e^{ni\theta} d\theta} \\
&= iR^{-n}\overline{\frac{1}{iR^n}\oint_{|z|=R} f(z) z^{n-1} dz} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

omdat het integrandum holomorf is voor $|z| \leqslant R$ (waarbij we voor $n = 0$ gebruik maken van $f(0) = 0$). Uit (2.8) en (2.9) volgt (voor $n \geqslant 0$)

$$a_n = \frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=R} \Re\mathrm{e}\, f(z) z^{-n-1} dz \tag{2.10}$$

waaruit (voor $n \geqslant 1$)

$$a_n = \frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=R} (\Re\mathrm{e}\, f(z) - M) z^{-n-1} dz$$

[5] [5, Theorem E, p. 50]

zodat $|a_n| \leqslant R^{-n} \int_0^{2\pi} (M - \Re\mathrm{e}\, f(Re^{i\theta}))d\theta = 2MR^{-n}$, waarbij de laatste gelijkheid volgt uit $\int_0^{2\pi} \Re\mathrm{e}\, f(Re^{i\theta})d\theta = a_0 = 0$ (uit (2.10)). Nu volgt eenvoudig dat

$$|f(z)| \leqslant 2M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R}\right)^n = \frac{2M\,|z|}{R - |z|}$$

en voor $k > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(k)}(z)\right| \leqslant 2M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} \left|\frac{dz^n}{d^k z}\right| &= \frac{2M}{R^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dx^n}{d^k x}\bigg|_{x=|z|/R} \\
&= \frac{2M}{R^k}\, \frac{d}{d^k x}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=|z|/R} \\
&= \frac{2M}{R^k} \frac{k!}{(1 - |z|/R)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

□

Opmerking 2.17. *Het bewijs van Lemma 2.16 wordt iets eenvoudiger wanneer we de sterkere eis opleggen dat* $|\Re\mathrm{e}\, f(z)| \leqslant M$ *voor* $|z| \leqslant R$. *(Om te besluiten dat* $|a_n| \leqslant 2MR^{-n}$ *kan men dan gewoon de driehoeksongelijkheid toepassen in* (2.10)*.) Die sterkere voorwaarde is meestal echter niet voldaan.*

Tot slot vermelden we nog het volgende resultaat, dat vaak van toepassing is op Dirichletreeksen afkomstig van arithmetische functies:

Lemma 2.18. *Zij* f *holomorf in* $B(a, R)$ *met* $a \in \mathbb{R}$ *en* $R \in\ ]0, +\infty]$. *Als* f *reëel is op een zeker deelinterval van* $]a - R, a + R[$, *dan geldt: de taylorcoëfficiënten van de ontwikkelilng van* f *rond* a *zijn reëel,* $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ *in* $B(a, R)$, f *is reëel in heel* $]a - R, a + R[$ *en* z_0 *is een nulpunt met multipliciteit* m *of pool van orde* m *a.s.a.* $\overline{z_0}$ *dat is. Indien de taylorcoëfficiënten bovendien eenzelfde teken hebben, is* $|f(z)| \leqslant f(|z|)$ *in* $B(a, R)$.

Bewijs. De taylorcoëfficiënten zijn uit te drukken als afgeleiden van f in het deelinterval waar f reëel is, en zijn dus reëel. De overige uitspraken zijn nu duidelijk. □

Voorbeelden van dergelijke functies zijn ζ, ζ'/ζ (wegens Stelling 2.9), $\log\zeta$ (wegens Stelling 2.10), die holomorf zijn op het halfvlak $\sigma > 1$. We kunnen echter niet zomaar iets zeggen over het teken van hun taylorcoëfficiënten; om deze functies af te schatten biedt volgend lemma een goed alternatief:

Lemma 2.19. *Zij* F *de Dirichletreeks van een reële arithmetische functie* f *met abscissa* σ_a *en* σ_c. *Dan geldt:* $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$, F *is reëel op* $]\sigma_c, +\infty[$ *en* z_0 *is een nulpunt met multipliciteit* m *of pool van orde* m *a.s.a.* $\overline{z_0}$ *dat is. Indien* $f \geqslant 0$ *of* $f \leqslant 0$ *(zodat* $\sigma_a = \sigma_c$*) is* $|F(z)| \leqslant |F(\Re\mathrm{e}\, z)|$ *(waar* F *convergeert).*

Bewijs. Triviaal. □

We merken nog op dat als f aan de voorwaarden van een van deze stellingen voldoet, met uitzondering van polen op de reële as, f ook reëel is op de hele reële as (met uitzondering van de polen). Het volstaat immers de polen weg te werken door te vermenigvuldigen met een gepaste reële veelterm opdat het product holomorf zou zijn op het gewenste deel van $\mathbb{R}$, en de stellingen toepasbaar zijn.

2.4 De Riemann-zèta-functie

Stelling 2.20 (Integraalrepresentatie van de ζ-functie)**.** *Voor $\sigma > 1$ is*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{x\}\, x^{-s-1}dx. \tag{2.11}$$

Bewijs.[6] Zij $\sigma > 1$. Voor $x > 1$ is wegens de sommatieforule van Euler (Stelling 1.10)

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} n^{-s} &= \int_1^x u^{-s}du - s\int_1^x \{u\}\, u^{-s-1}du - \{x\}\, x^{-s} + 1\\ &= \frac{x^{1-s}-1}{1-s} - s\int_1^x \{u\}\, u^{-s-1}du + o(1) + 1.\end{aligned}$$

Voor $x \to \infty$ volgt nu het gestelde, gelet op $x^{1-s} = o(1)$ en het feit dat de integraal convergeert.
$\square$

Stelling 2.21 (Analytische voortzetting van de zèta-functie)**.** *De integraalrepresentatie uit Stelling 2.20 definieert een analytische voortzetting van $\zeta(s)$ in het halfvlak $\sigma > 0$, met uitzondering van een enkelvoudige pool met residu 1 voor $s = 1$.*

Bewijs. Zie bv. [4, Theorem 4.11, p. 126]. $\square$

Gevolg 2.22. *$\zeta(s) = O(1/(\sigma-1))$ en $\zeta'(s)/\zeta(s) = O(1/(\sigma-1))$ uniform in het halfvlak $\sigma > 1$.*

Bewijs. Voor $\sigma > 1$ is $|\zeta(s)| \leqslant \zeta(\sigma)$, zodat het volstaat dit te bewijzen voor $s \in \mathbb{R}$. Voor σ in een omgeving van 1 geldt dit omdat $\zeta(s)$ een pool heeft van orde 1 in $s = 1$. Aangezien $\zeta(\sigma)$ dalend is op $\mathbb{R} \cap \{\sigma > 1\}$ is de afschatting geldig voor alle $\sigma > 1$.
Analoog voor ζ'/ζ, die een enkelvoudige pool heeft in 1 wegens de eigenschappen van de logaritmische afgeleide, waarvoor $\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma) < 0$ begrensd (zelfs stijgend) is voor $\sigma \to +\infty$ wegens Stelling 2.9, en waarvoor $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leqslant |\zeta(\sigma)|$ wegens Lemma 2.19. $\square$

We zullen deze afschattingen voor ζ en ζ'/ζ vaak stilzwijgend toepassen.
We hebben ook nog de volgende algemenere gedaante van de integraalrepresentatie:

Stelling 2.23. *Voor $\sigma > 0$ en $x > 0$ is*

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_x^\infty \{u\}\, u^{-s-1}du.$$

Bewijs. Voor $y > 1$ is wegens de sommatieformule van Euler (Stelling 1.10)

$$\sum_{x<n\leqslant y} n^{-s} = \int_x^y u^{-s}du - s\int_x^y \{u\}\, u^{-s-1}du - \{y\}\, y^{-s} + \{x\}\, x^{-s}.$$

Voor $\sigma > 1$ zijn de integralen convergent voor $y \to \infty$ en volgt het beweerde. Voor $0 < \sigma \leqslant 1$ geldt de gelijkheid ook, aangezien beide leden holomorfe functies van s zijn op het halfvlak $\sigma > 0$. $\square$

[6] [7, Theorem 1.12, p. 24]

3 Een nulpuntvrij gebied als gevolg van Jensens ongelijkheid

We buiten Jensens ongelijkheid en het Borel-Carathéodery lemma verder uit om de logaritmische afgeleide van een holomorfe functie te benaderen door haar singulariteiten.

Lemma 3.1. *Zij $f(z)$ holomorf voor $|z| \leqslant A$ en $f(0) \neq 0$. Als $|f(z)| \leqslant M$ voor $z \leqslant A$, dan is voor $0 \leqslant |z| \leqslant r < R < A$,*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{z - z_k} + O_{r,R,A}\left(\log \frac{M}{|f(0)|}\right)$$

waarbij de som loopt over de K nulpunten z_k van f met $|z_k| \leqslant R$ (met multipliciteit), en waarbij de constante in de O-term enkel afhangt van r,R en A (en niet van f of M).

Bewijs.[7] Veronderstel eerst dat $f(z) \neq 0$ voor $|z| = R$, en stel, zoals in het bewijs van Jensens ongelijkheid,

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^{K} \frac{R^2 - z\overline{z_k}}{R(z - z_k)}.$$

Opnieuw is $g(z)$ holomorf voor $|z| \leqslant R$ en $|g(z)| = |f(z)| \leqslant M$ voor $|z| = R$, en dus $|g(z)| \leqslant M$ voor $|z| \leqslant R$ wegens het maximumprincipe. Ook is $|g(0)| \geqslant |f(0)|$ en is $g(z)$ niet-nul voor $|z| \leqslant R$. Zij nu $h(z)$ holomorf voor $|z| \leqslant R$ met $h(0) = 0$ en $g(z) = g(0)e^{h(z)}$. Dan is $\Re\mathrm{e}\, h(z) = \log|g(z)| - \log|g(0)| \leqslant \log(M/|f(0)|)$. Wegens het Borel-Carathéodery lemma is

$$\left|h'(z)\right| \leqslant \frac{2R \log \frac{M}{|f(0)|}}{(R-r)^2} \ll_{r,R} \log \frac{M}{|f(0)|}$$

voor $|z| \leqslant r$. Er geldt

$$h'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^{K} \frac{-1}{z - z_k} + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{z - R^2/\overline{z_k}}.$$

Voor $|z| \leqslant r$ is $\left|z - R^2/\overline{z_k}\right| \geqslant \left|R^2/\overline{z_k}\right| - |z| \geqslant R - r \gg_{r,R} 1$. Wegens Jensens ongelijkheid is

$$K \leqslant \frac{\log \frac{M}{|f(0)|}}{\log(A/R)} \ll_{r,R,A} \log \frac{M}{|f(0)|},$$

zodat de tweede som $\ll_{r,R,A} \log(M/|f(0)|)$.
Indien f nulpunten heeft met modulus R, dan heeft (wegens eenduidigheid van holomorfe functies) f geen nulpunten met modulus $R + \varepsilon$, voor $\varepsilon > 0$ klein genoeg. Aangezien de impliciete constante in de O-term continu afhangt van R (en r en A), volgt het gestelde door de limiet $\varepsilon \to 0$ te nemen. □

Opmerking 3.2. *In feite volgt uit het bewijs dat de impliciete constante gelijk aan*

$$\frac{2R}{(R-r)^2} + \frac{1}{(R-r)\log(A/R)}$$

kan worden gekozen.

[7] [7, Lemma 6.3, p. 170]

3.1 Het hoofdingrediënt

Lemma 3.1 laat nu toe conclusies te trekken over de nulpunten van bijvoorbeeld de ζ-functie, op voorwaarde dat we de groei ervan min of meer kennen.

Lemma 3.3. *$\zeta(s) = O_\delta(t)$ ($|t| \to \infty$) voor $\sigma > \delta > 0$.*

Bewijs. Voor $\sigma > 0$ is

$$|\zeta(s)| = \left| \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{x\}\, x^{-s-1} dx \right| \ll 1 + |s| \int_1^\infty x^{-\sigma-1} dx = 1 + \frac{|s|}{\sigma} \leqslant 2 + \frac{t}{\sigma},$$

gebruik makend van $|s| \leqslant \sigma + t$. □

Het feit dat de afhankelijkheid van de O-term in Lemma 3.1 van f expliciet gekend is, laat toe, onder gunstige voorwaarden, het resultaat om te vormen tot een gelijkmatige afschatting over onbegrensde gebieden i.p.v. over cirkels:

Lemma 3.4. *Voor $3/4 \leqslant \sigma \leqslant 2$ is (gelijkmatig voor $|t| \to \infty$)*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_\rho \frac{1}{s-\rho} + O(\log |t|)$$

waarbij de som loopt over de nulpunten ρ van ζ waarvoor $|\rho - (3/2 + it)| \leqslant 0.8$.

Bewijs.[8] Zij s vast met $3/4 \leqslant \sigma \leqslant 2$. Stel $f_t(z) = \zeta(z + 3/2 + it)$. Voor $|t| \geqslant 1$ is f_t holomorf voor $|z| \leqslant 1$, zodat Stelling 3.1 geeft, met $r = 3/4$, $R = 0.8$ en $A = 1$, dat, indien $|f_t(z)| \leqslant M$ voor $|z| \leqslant 1$,

$$\frac{f_t'(z)}{f_t(z)} = \sum_{|\rho - (3/2+it)| \leqslant 0.8} \frac{1}{z-\rho} + O\left(\log \frac{M}{f_t(0)}\right)$$

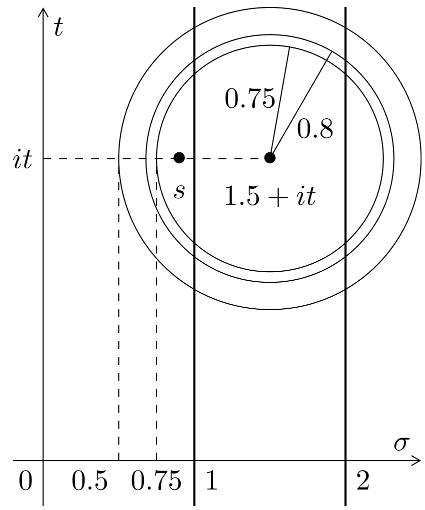
voor $|z| \leqslant r$; dus i.h.b. voor $z = s - (3/2 + it)$. Wegens Lemma 3.3 is $\zeta(z) = O(\Im\mathrm{m}\, z)$ voor $\Re\mathrm{e}\, z \geqslant 1/2$, zodat $f_t(z) = O(t)$ voor $|z| \leqslant 1$ en $M = O(t)$ kan worden gekozen. Omdat $f_t(0) \gg 1$ (wegens Lemma 2.12) is nu

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_\rho \frac{1}{s-\rho} + O(\log |t|)$$

waarbij de O-term onconditioneel is. □

Opmerking 3.5. *De getallen in bovenstaand resultaat zijn vrij willekeurig gekozen. Meer bepaald kan het gemakkelijk uitgebreid worden tot een lokaal gelijkmatige afschatting voor $\sigma > 0$, door de stralen in de toepassing van Lemma 3.1 iets groter te kiezen. Aangezien we zeker willen dat $f(0) \neq 0$ moeten de cirkels wel centra hebben rechts van de lijn $\sigma = 1$, zodat de som over ρ nulpunten in iets grotere cirkels toelaat naarmate $\sigma \to 0^+$. Tot slot merken we nog op dat betere afschattingen van ζ rechtstreeks leiden tot betere resttermen in bovenstaand lemma.*

[8] [7, Lemma 6.4, p. 171]



Figuur 3.1: Schets bij Lemma 3.4

We zullen Lemma 3.4 op twee manieren toepassen. De 3–4–1-ongelijkheid (Lemma 3.6) levert (vrij zwakke) informatie over de groei van ζ'/ζ, die we via Lemma 3.4 kunnen omzetten tot informatie over de niet-triviale nulpunten, om zo een nulpuntvrij gebied te bekomen (in Stelling 3.8). Omgekeerd levert de bekomen begrenzing voor de nulpunten dan via Lemma 3.4 informatie over de groei van ζ'/ζ (Lemma 5.1), die we nodig hebben in afschattingen in de Perronformule voor Λ (in Stelling 5.6). Het moge duidelijk zijn dat Lemma 3.4 een van de bruggen vormt die de nulpunten van ζ in verband brengt met de groei van ζ'/ζ, en dus van ψ. Een tweede brug ligt in het feit dat residus in de polen van ζ'/ζ bijdragen leveren aan $\psi(x)$ via de Perronformule. Meer bepaald is het zo dat de nulpunten van ζ de hoofdtermen in asymptotische formules voor ψ bepalen, en de groei van ζ'/ζ de grootte van de restterm.

3.2 De 3–4–1-ongelijkheid en haar gevolgen

Lemma 3.6 (3–4–1-ongelijkheid voor ζ'/ζ)**.** *Voor $\sigma > 1$ is*

$$\Re\mathrm{e}\left(3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it)\right) \leqslant 0.$$

Bewijs.[9] Wegens Stelling 2.9 is

$$\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\Re\mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s} = -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(t\log n)$$

(voor $\sigma > 1$) zodat de uitdrukking gelijk is aan

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}(3 + 4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n)).$$

Het gestelde volgt nu uit $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos\theta)^2 \geqslant 0$. □

[9] [7, Lemma 6.5, p. 172]

Duidelijkerwijs gaat hetzelfde bewijs op voor eenderwelke Dirichletreeks met uitsluitend positieve of negatieve coëfficiënten.

De 3–4–1-ongelijkheid is cruciaal in vele constructies van nulpuntvrije gebieden. Vooraleer we zo'n gebied construeren schetsen we hoe deze ongelijkheid zijn dienst bewijst: Veronderstel dat ζ een nulpunt $\rho = \beta + i\gamma$ heeft dat dicht bij de rechte $\sigma = 1$ ligt. Lemma 3.4 geeft, voor $\sigma > 1$, een ondergrens op $\Re\mathrm{e}(\zeta'/\zeta)(\sigma + i\gamma)$ i.f.v. β (op voorwaarde dat, voor $s = \sigma + i\gamma$, de som over ρ de term $1/(s-\rho)$ bevat) en γ, en een ondergrens op $\Re\mathrm{e}(\zeta'/\zeta)(\sigma + 2i\gamma)$ i.f.v. γ. Het gedrag van $\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$ voor $\sigma \to 1$ kennen we goed, zodat we alles bij elkaar een ondergrens kennen voor de uitdrukking in de 3–4–1-ongelijkheid. Eisen we dat deze ondergrens $\leqslant 0$ is, dan volgt een relatie waaraan ρ moet voldoen.
Indien men echter onvoorzichtig te werk gaat met de asymptotische afschattingen geldt de bekomen relatie enkel voor $|\gamma|$ groot genoeg. De bekomen c in de ongelijkheid kan wel verkleind worden tot ook de nulpunten in $\sigma < 1$, $|t| \leqslant |\gamma|$ er aan voldoen (zo zijn er immers hoogtens slechts eindig veel), waarna men nog moet bewijzen dat er geen nulpunten op de rechte $\sigma = 1$ liggen. Hoewel dit laatste geen al te moeilijke taak is (zie Stelling 3.11), zou zo'n werkwijze aanleiding geven tot een oncontroleerbare waarde van c (t.t.z., het expliciet maken van c erg bemoeilijken tenzij men beroep wil doen op computerberekeningen), en dit terwijl iets voorzichtiger te werk gaan zo'n omwegen onnodig maakt. Het precisiewerk bestaat er in om de afschattingen in het bewijs geldig te maken voor $|\gamma| > T$ (voor een kleine T; hier 0.9) en niet zomaar voor voldoende grote $|\gamma|$. De pool van ζ'/ζ voor $s = 1$ maakt dat de O-term in Lemma 3.4 niet uniform is voor alle t, zodat het in elk geval nodig is om kleine waarden van $|\gamma|$ apart te beschouwen:

Stelling 3.7. *$\zeta(s)$ heeft geen nulpunten voor $\sigma > (1 + t^2)/2$.*

Bewijs. Uit de integraalrepresentatie (Stelling 2.20) volgt voor $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\geqslant \left|\frac{s}{s-1}\right| - |s| \int_1^\infty \left|\{x\}\, x^{-s-1}\right| dx \\ &\geqslant \left|\frac{s}{s-1}\right| - |s| \int_1^\infty x^{-\sigma-1} dx \\ &= |s| \left(\frac{1}{|s-1|} - \frac{1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

zodat $\zeta(s) \neq 0$ als $|s-1| < \sigma$, d.i. als $(\sigma-1)^2 + t^2 < \sigma^2$. □

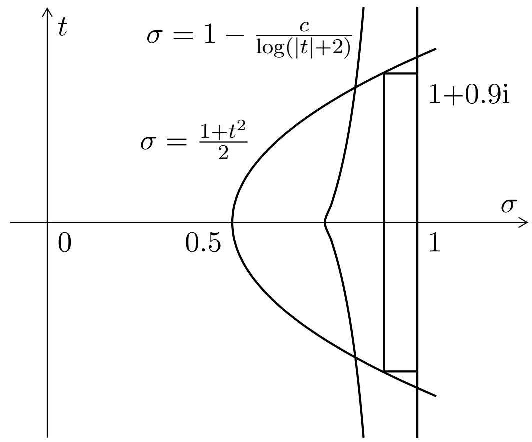
I.h.b. zien we dat ζ geen nulpunten heeft in bijvoorbeeld de rechthoek $|t| \leqslant 0.9$, $0.905 < \sigma \leqslant 1$.

Stelling 3.8. *Voor zekere $c > 0$ heeft $\zeta(s)$ geen nulpunten in het gebied $\sigma > 1 - c/\log(|t|+2)$.*

I.h.b. heeft ζ geen nulpunten voor $\sigma = 1$. De "+2" zorgt er enkel voor dat de kromme die het gebied langs links afbakent, links van de lijn $\sigma = 1$ blijft (daar $\log(|t|+2) \geqslant \log 2 > 0$); asymptotisch heeft ze geen enkele relevantie.

Bewijs. [10] We tonen dit aan voor $|t| \geqslant 0.9$. Door vervolgens c eventueel te verkleinen geldt de stelling ook voor $|t| \leqslant 0.9$, gelet op Stelling 3.7. Wegens Lemma 3.4 is, voor $1 < \sigma \leqslant 2$, $\Re\mathrm{e}\, \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \geqslant -c\log(|t|+2)$ voor $|t| \geqslant 0.9$ en zekere $c > 0$, want elke term $1/(s-\rho)$ heeft reëel

[10] [7, Theorem 6.6, p. 172]



Figuur 3.2: Nulpuntvrije gebieden van ζ

deel $\Re\mathrm{e}(s-\rho)/|s-\rho|^2 > 0$. Zij nu $\rho_0 = \beta_0 + \gamma_0 i$ een nulpunt van ζ met $\beta_0 \geqslant 0.7$ en $|\gamma_0| \geqslant 0.9$. Wegens Stelling 1.4 is $\beta_0 \leqslant 1$. Aangezien $|2\gamma_0| \geqslant 0.9$ is

$$\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2i\gamma_0) \geqslant -c\log(2|\gamma_0| + 4)$$

voor $\sigma > 1$. Analoog is

$$\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\gamma_0) \geqslant \Re\mathrm{e}\,\frac{1}{\sigma + i\gamma_0 - \rho_0} - c\log(|\gamma_0| + 2) = \frac{1}{\sigma - \beta_0} - c\log(|\gamma_0| + 2)$$

(aangezien $\sigma + i\gamma_0 - \rho_0 \in \mathbb{R}$), waarbij we gebruik maken van het feit dat $|\rho_0 - (3/2 + i\gamma_0)| \leqslant 0.8$ (daar $\beta_0 \geqslant 0.7$), zodat de som over ρ voor $s = \sigma + i\gamma_0$ wel degelijk de term $1/(s - \rho_0)$ bevat. Samengevat is

$$\begin{aligned} -3\,\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\,\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\gamma_0) - \Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2i\gamma_0) \leqslant -3\,\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4c\log(|\gamma_0| + 2) - \frac{4}{\sigma - \beta_0} \\ + c\log(2|\gamma_0| + 4). \end{aligned}$$

Aangezien ζ'/ζ een pool met residu -1 heeft voor $s = 1$ is de eerste term, voor $\sigma \to 1$, $3/(\sigma - 1) + O(1)$. Voor $1 < \sigma \leqslant 2$ is dus wegens de 3–4–1-ongelijkheid,

$$0 \leqslant \frac{3}{\sigma - 1} + 5c\log(|\gamma_0| + 2) - \frac{4}{\sigma - \beta_0} + O(1), \tag{3.1}$$

of dus, door $5c$ te vergroten tot c^*, dat

$$\frac{4}{\sigma - \beta_0} - \frac{3}{\sigma - 1} \leqslant c^* \log(|\gamma_0| + 2). \tag{3.2}$$

Blijft enkel nog om dit om te zetten naar een afschatting zoals in de opgave van de stelling. Stellen we $\sigma = 1 + \delta$, dan kunnen we dit nog schrijven als

$$1 + \delta - \beta_0 \geqslant \frac{4}{\frac{3}{\delta} + c^* \log(|\gamma_0| + 2)}.$$

Het ligt nu voor de hand om $\delta = 1/(kc^* \log(|\gamma_0| + 2))$ te kiezen:

$$1 - \beta_0 \geqslant \left(\frac{4}{3k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1}{c^* \log(|\gamma_0| + 2)}. \tag{3.3}$$

Voor $k > 1$ is de factor in het rechterlid positief. $k = 2$ geeft $1 - \beta_0 \geqslant 1/(14c^* \log(|\gamma_0| + 2))$. Door c^* desnoods te vergroten is voor deze k, $\sigma = 1 + \delta \leqslant 2$.
(In feite is (3.2), door c^* desnoods te vergroten, geldig voor alle $\sigma > 1$ aangezien het linkerlid begrensd is voor $\sigma > 2$.) □

Opmerking 3.9. *De manier waarop we de ongelijkheid* (3.2) *hebben herschreven is suggestief in die zin dat ze insinueert dat de beoogde waarde van σ afhangt van γ_0 alleen (en niet van β_0). Er zijn echter andere mogelijkheden om het bewijs af te maken, startend van* (3.2)*. Indien $\beta_0 = 1$ zou het linkerlid naar $+\infty$ gaan als $\sigma \to 1^+$, dus moet $\beta_0 < 1$. Stellen we nu $\sigma = 1 + 3k(1 - \beta_0)$, dan volgt precies* (3.3)*.*

We illustreren nog even hoe de 3–4–1-ongelijkheid in andere situaties kan worden aangewend, en tonen op een alternatieve manier aan dat ζ geen nulpunten heeft op de lijn $\sigma = 1$:

Lemma 3.10 (3–4–1-ongelijkheid voor ζ)**.** *Voor $\sigma > 1$ is*

$$\left| \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) \right| \geqslant 1.$$

Bewijs.[11] Er geldt, gebruik makend van het Eulerproduct (2.3) en gelet op $\log |z| = \Re\mathrm{e} \log z$,

$$\log |\zeta(s)| = \log \left| \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \right| = - \Re\mathrm{e} \sum_p \log(1 - p^{-s}).$$

Aangezien $-\log(1 - z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ $(|z| < 1)$ is dit

$$\Re\mathrm{e} \sum_p \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{np^{ns}} = \sum_p \sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(t \log p^n)}{np^{n\sigma}}$$

zodat de beweerde ongelijkheid volgt uit $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geqslant 0$. (De absolute convergentie van die laatste reeks volgt omdat ze convergeert voor $t = 0$, m.n. naar $\log \zeta(\sigma)$.) □

Stelling 3.11. *ζ heeft geen nulpunten op de lijn $\sigma = 1$.*

Bewijs.[12] Stel dat $\zeta(1 + it) = 0$. Voor $\sigma \to 1$ is $\zeta(\sigma) = O(1/(\sigma - 1))$, zodat

$$\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) = O\left(\frac{1}{(\sigma - 1)^3} \cdot (\sigma - 1)^4 \cdot 1 \right) = O(\sigma - 1) = o(1).$$

voor $\sigma \to 1$ (daar bij veronderstelling $1 + it$ een nulpunt is met multipliciteit minstens 1). Voor $\sigma \to 1^+$ levert dit een strijdigheid op met de 3–4–1-ongelijkheid (Lemma 3.10). □

[11] [4, Lemma 5.9, p. 152]
[12] [4, Theorem 5.7(i), bewijs p. 153]

3.3 Alternatieven voor de 3–4–1-ongelijkheid

De ongelijkheid

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geqslant 0$$

speelt in een cruciale rol in de voorgaande bewijzen (alsook die die nog volgen) van nulpuntvrije gebieden. Er zijn echter andere mogelijkheden, en het loont de moeite om te onderzoeken hoeveel beter het eindresultaat kan worden indien we gebruik maken van een ongelijkheid van de vorm

$$a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots + a_n\cos n\theta \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Hiertoe lopen we door het bewijs van Stelling 3.8: zij $\rho_0 = \beta_0 + \gamma_0 i$ een nulpunt met $0.7 \leqslant \beta_0 \leqslant 1$ en $\gamma_0 \geqslant 0.9$. Voor $1 < \sigma \leqslant 2$ is (voor zekere $c > 0$)

$$\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + ki\gamma_0) \geqslant \begin{cases} -c\log(k\,|\gamma_0| + 2k) & \text{voor } k \in \{2,\ldots,n\} \\ \frac{1}{\sigma-\beta_0} - c\log(|\gamma_0| + 2) & \text{voor } k = 1. \end{cases}$$

Wegens (3.4) is (met een analoog bewijs als dat van Lemma 3.6)

$$\Re\mathrm{e}\left(a_0\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + a_1\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) + \cdots + a_n\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + nit)\right) \leqslant 0 \tag{3.5}$$

zodat, voor $t = \gamma_0$, (vergelijk met (3.1))

$$0 \leqslant \frac{a_0}{\sigma - 1} + (a_1 + \cdots + a_n)c\log(|\gamma_0| + 2) - \frac{a_1}{\sigma - \beta_0} + O(1)$$

op voorwaarde dat $a_0, \ldots, a_n \geqslant 0$, of dus

$$\frac{a_1}{\sigma - \beta_0} \leqslant \frac{a_0}{\sigma - 1} + c^*\log(|\gamma_0| + 2).$$

Stel nu $\sigma = 1 + 1/(kc^*\log(|\gamma_0| + 2))$, dan volgt (op voorwaarde dat $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$)

$$1 - \beta_0 \geqslant \left(\frac{a_1}{a_0 k + 1} - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{c^*\log(|\gamma_0| + 2)}.$$

Aangezien we $\frac{a_1}{a_0k+1} - \frac{1}{k} > 0$ zo groot mogelijk willen, moet om te beginnen $a_1 > a_0$. Hiermee is de factor maximaal voor $k = 1/(\sqrt{a_0a_1} - a_0)$ en gelijk aan $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0})^2$. Voor $(a_0, a_1, a_2) = (3, 4, 1)$ kiezen we dus best $k = 1/(2\sqrt{3} - 3) \approx 2.15$. Merk op dat het geen zin heeft om $a_0, a_1, \ldots$ te vermenigvuldigen met eenzelfde getal om zo een grotere voorfactor te verkrijgen: c^* hangt immers ook af van de a_k: $c^* = c \cdot (a_1 + \cdots + a_n)$, met c een vaste constante (die niet afhangt van de a_k). Het vinden van de grootst mogelijke voorfactor bestaat dus uit het vinden van

$$\sup\frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0})^2}{a_1 + \cdots + a_n} \tag{3.6}$$

waarbij het supremum gaat over alle positieve tupels $(a_0, \ldots, a_n)$ die voldoen aan (3.4). Dergelijke optimalisatieproblemen werden bestudeerd door o.a. Landau.
We geven nog een voorbeeld van alternatieve tupels $(a_0, \ldots, a_n)$:

Stelling 3.12. *De n-de Fejér-kern*

$$\Delta_n(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos k\theta,$$

met $n \geqslant 1$, is positief.

Bewijs. Er geldt

$$n\Delta_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} (n-k)\cos k\theta = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k} \cos j\theta.$$

We hebben

$$\sum_{j=-k}^{k} \cos j\theta = \frac{1}{2}\sum_{j=-k}^{k}(e^{ij\theta}+e^{-ij\theta}) = \sum_{j=-k}^{k} e^{ij\theta} = \frac{e^{(k+1)i\theta}-e^{-ki\theta}}{e^{i\theta}-1}$$

zodat

$$\begin{aligned} n\Delta_n(\theta) = \frac{1}{e^{i\theta}-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{(k+1)i\theta}-e^{-ki\theta}\right) &= \frac{e^{(n+1)i\theta}-e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-1)^2} - \frac{e^{-ni\theta}-1}{(e^{i\theta}-1)(e^{-i\theta}-1)} \\ &= \frac{e^{ni\theta}-2+e^{-ni\theta}}{e^{-i\theta}(e^{i\theta}-1)^2} \\ &= \left(\frac{e^{ni\theta/2}-e^{-ni\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}\right)^2 = \left(\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

□

Het supremum in (3.6) is dus minstens

$$\frac{\left(\sqrt{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1\right)^2}{2(n-1)-\frac{2}{n}\frac{(n-1)n}{2}} = \frac{\left(\sqrt{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1\right)^2}{n-1}$$

voor alle $n \geqslant 2$. Dit kunnen we begrenzen door $\frac{1}{n-1}$, zodat deze ondergrens een maximale waarde heeft. Die ligt bij $n = 5$ en is $0.0175\ldots \approx \frac{1}{57}$. Ter vergelijking: in het bewijs van Stelling 3.8 bekwamen we de ondergrens $\frac{1}{5\cdot 14} = \frac{1}{70}$.
Men kan aantonen ([9, p. 36]) dat het supremum in (3.6) voldoet aan

$$\frac{1}{34.5035864\ldots} \leqslant \sup \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0})^2}{a_1+\cdots+a_n} \leqslant \frac{1}{34.468305\ldots}.$$

4 Een nulpuntvrij gebied als gevolg van Weierstrassfactorisatie

De voorgaande methode steunt cruciaal op de gelijkheid uit Lemma 3.4: Voor $3/4 \leqslant \sigma \leqslant 2$ is (gelijkmatig voor $|t| \to \infty$)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho} + O(\log|t|)$$

waarbij de som loopt over de nulpunten ρ van ζ waarvoor $|\rho - (3/2+it)| \leqslant 0.8$. M.b.v. de theorie over factorisatie van gehele functies zullen we de volgende gelijkheid bewijzen:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = C - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

(voor zekere $C \in \mathbb{C}$) waarbij de som loopt over de nulpunten van ζ in de strook $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Deze geeft een goed alternatief voor Lemma 3.4, en eens deze gelijkheid bekomen is volgt vrij gemakkelijk hetzelfde nulpuntvrij gebied.

4.1 Factorisatie van gehele functies

Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een gehele functie, en veronderstel dat $a_1, \ldots, a_n$ nulpunten zijn van f (mogelijks met herhaling afhankelijk van hun multipliciteit). Dan is

$$\frac{f(z)}{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}$$

(na uitbreiding in de ophefbare singulariteiten) een gehele functie, m.a.w. er bestaat een gehele functie g waarvoor $f(z) = g(z) \cdot \prod_{k=1}^{n}(z - a_n)$. De hoop is nu om hiervan een oneindige versie te hebben, die f schrijft als product van (mogelijks oneindig veel) lineaire factoren en een niet-nul holomorfe functie g. Dergelijke representatie laat immers toe (zodra de nulpunten van f (benaderend) gekend zijn) sterke asymptotische informatie over f af te leiden. Om zo'n stelling te bekomen moeten we eerst formeel maken wat oneindige producten zijn, en hun convergentie bestuderen.

4.1.1 Oneindige producten

Definitie 4.1. *Zij (z_n) een rij complexe getallen. Men stelt*

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n := \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} z_n$$

als die limiet bestaat, en zegt dat het oneindig product convergeert.

Klaarblijkelijk impliceert de convergentie van $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ die van $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n|$, en is $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n| = |\prod_{n=1}^{\infty} z_n|$.
Als een oneindig product een niet-nul limiet heeft, dan moeten de factoren naderen tot 1. Men kan dus verwachten dat het natuurlijker is om met factoren $1 + z_n$ i.p.v. z_n te werken.

Stelling 4.2. *Zij (z_n) een rij complexe getallen met reëel deel groter dan -1. Dan zijn de volgende equivalent:*

1. $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *convergeert naar* $z \neq 0$*;*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ *convergeert naar* $\log z + 2k\pi i$ *voor zekere* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Ook de volgende zijn equivalent:

1. $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ *convergeert;*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ *convergeert absoluut;*
3. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *convergeert absoluut,*

en in dat geval zeggen we dat $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *absoluut convergeert. I.h.b. zien we dat absolute convergentie van een product gewone convergentie impliceert.*

Bewijs. [13] Indien het product convergeert, dan ook de logaritme van de absolute waarde ervan, en dus $\Re \sum \log(1 + z_n)$. De argumenten van de partieelproducten zijn convergent modulo 2π, en dus ook gewoon convergent omdat ze hoogstens met π verhogen of verlagen. We maken dit formeel: stel θ_n de poolhoek van $\prod_{j\leqslant n}(1 + z_j)$ met $\theta - \pi < \theta_n \leqslant \theta + \pi$,

[13] [2, Proposition 5.2, Proposition 5.4, Corollary 5.6, pp. 161-162]

waarbij $\theta = \arg z$. Er bestaan $l_n \in \mathbb{Z}$ waarvoor $|\theta + 2l_n\pi - \theta_n| < \varepsilon$ voor n groot genoeg, dus $2\pi\,|l_n| \leqslant \varepsilon + |\theta - \theta_n| \leqslant \pi + \varepsilon$, zodat $l_n = 0$ voor n groot genoeg, dus $\theta_n \to \theta$. We hebben $\Im\mathrm{m} \sum_{j \leqslant n} \log(1 + z_j) = \theta_n + 2k_n\pi$ voor zekere $k_n \in \mathbb{Z}$. Er geldt $2\pi\,|k_{n+1} - k_n| \leqslant |\theta_{n+1} - \theta_n| + |\Im\mathrm{m} \log(1 + z_{n+1})| \to 0$, zodat $k_n = k$ uiteindelijk constant is, en $\Im\mathrm{m} \sum \log(1 + z_n) = \theta + 2k\pi$. De omgekeerde implicatie volgt uit de continuïteit van exp.
Wat betreft de tweede equivalentie zijn 2. en 3. equivalent aangezien $\log(1 + z) \asymp z$ voor $|z| < 1 - \delta$; de equivalentie van 1. en 2. volgt nu uit het eerste deel van de stelling. □

De convergentie van een oneindig product hangt uiteraard niet af van het toevoegen van een eindig aantal niet-nul factoren, zodat de equivalentie tussen 1. en 3. in het tweede deel van Stelling 4.2 ook geldt zonder de voorwaarde $\Re\mathrm{e}\, z_n > -1$. In geval van absolute convergentie volgt uit de stelling ook nog dat het oneindig product niet verandert na herschikking van de factoren.
Aangezien ons doel is om analyticiteit aan te tonen van oneindige producten, hebben we een functionele variant van bovenstaande implicaties nodig, die niet zomaar over puntsgewijze maar over gelijkmatige convergentie gaat (met het oog op overdracht van analyticiteit):

Stelling 4.3 (Gelijkmatige absolute convergentie van producten)**.** *Zij X een compacte metrische ruimte en (f_n) een rij continue functies $X \to \mathbb{C}$. Indien $\sum f_n$ gelijkmatig absoluut convergeert op X, dan convergeert ook $f(x) = \prod(1 + f_n(x))$ gelijkmatig absoluut op X, is f continu en bestaat $n_0 \in \mathbb{N}$ zo dat $\prod_{n=n_0}^{\infty}(1 + f_n(x))$ geen nulpunten heeft.*

Bewijs.[14] Zij n_0 zo groot dat $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ voor $x \in X$ en $n \geqslant n_0$ (die bestaat wegens de gelijkmatige convergentie van $\sum f_n$). Aangezien $\log(1 + z) \asymp z$ voor $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ is ook $g(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + f_n(x))$ gelijkmatig absoluut convergent op X. Mocht exp een gelijkmatig continue afbeelding zijn zou hieruit volgen dat ook het product $\prod_{n=n_0}^{\infty}(1 + f_n(x)) = \exp g(x)$ gelijkmatig absoluut convergeert op X. De functie exp is echter wel gelijkmatig continu op halfvlakken van de vom $\Re\mathrm{e}\, z < a$. Aangezien g continu is (wegens overdracht van continuïteit) en X compact is, is $g(X)$ bevat in zo'n halfvlak zodat $\prod_{n=n_0}^{\infty}(1 + f_n(x))$ gelijkmatig absoluut convergeert en geen nulpunten heeft wegens het eerste deel van Stelling 4.2. Het vermenigvuldigen met een eindig aantal begrensde functies bewaart de gelijkmatige (absolute) convergentie van het product, zodat $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(x))$ gelijkmatig absoluut convergeert op X, en dus continu is. □

Uit het bewijs blijkt dat de eis dat X compact is kan worden vervangen door bijvoorbeeld te eisen dat de f_n begrensd zijn en $\sum f_n$ begrensd is (want dan is ook $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + f_n)$ begrensd, zodat exp kan aangewend worden als gelijkmatig continue afbeelding).

Stelling 4.4 (Overdracht van analyticiteit voor producten)**.** *Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ en (f_n) een rij holomorfe functies op D waarvoor $\sum(f_n - 1)$ lokaal gelijkmatig absoluut convergeert op D. Dan is $f(z) = \prod f_n(z)$ holomorf en lokaal gelijkmatig absoluut convergent. Is D een gebied en f identisch 0, dan is zekere f_n identisch 0. Een nulpunt van f is een nulpunt van hoogstens een eindig aantal f_n en de multipliciteit van een nulpunt van f is de som van de multipliciteiten van dat punt als nulpunt van de f_n.*

Bewijs.[15] Uit Stelling 4.3 volgt dat $\prod f_n(z)$ gelijkmatig absoluut convergeert op compacta, zodat f holomorf is wegens overdracht van analyticiteit. Verder weten we dat n_0 bestaat zo dat $\prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z)$ geen nulpunten heeft, zodat de laatste twee beweringen volgen. Als f identisch 0 is, dan heeft minstens één f_n overaftelbaar veel nulpunten en is dus identisch 0 wegens eenduidigheid (op voorwaarde dat D een gebied is). □

[14][2, Lemma 5.8, p. 162]
[15][2, Theorem 5.9, p. 163]

4.1.2 Weierstrassproducten

Zij f een gehele functie met $f(0) \neq 0$. Stel dat f oneindig veel nulpunten heeft; wegens eenduidigheid zijn dit er dan aftelbaar veel, en in elk begrensd gebied ligt een eindig aantal nulpunten. Ze kunnen dus gerangschikt worden in een rij $a_1, a_2, \ldots$ (waarbij nulpunten even vaak voorkomen als hun multipliciteit) zo dat

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_n| \to \infty.$$

Stelling 4.5 (Factorisatiestelling van Weierstrass)**.** *Zij f een gehele functie waarvan 0 een nulpunt met multipliciteit m is, en zij $a_1, a_2, \ldots$ de niet-nul nulpunten (met multipliciteit) met $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$. Zij $k \in \mathbb{N}$ zo dat $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-k-1}$ convergeert. Dan bestaat een gehele functie g waarvoor*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}, \tag{4.1}$$

en het product in (4.1) is geheel en convergeert lokaal gelijkmatig absoluut in $\mathbb{C}$.

Indien zo'n k bestaat zal de stelling uiteraard ook gelden voor grotere k. Om de factoren in het product echter zo eenvoudig mogelijk te maken kiest men gewoonlijk k zo klein mogelijk. Bij conventie is de exponent in het product in (4.1) gelijk aan 0 als $k = 0$. Merk nog op dat het beweerde duidelijk is als er slechts een eindig aantal nulpunten is (de convergentie van het product is dan triviaal).

Bewijs. We mogen veronderstellen dat $m = 0$, want $z^{-m} f(z)$ is geheel en niet-nul in 0. Stel $f_n(z) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}$ en $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Het volstaat om te bewijzen dat $P(z)$ een gehele functie is met dezelfde nulpunten (en multipliciteiten) als f, want dan is hun quotiënt geheel en niet-nul, zodat g bestaat wegens Stelling 2.4. Wegens Stelling 4.4 volstaat het daartoe dat $\sum (f_n(z) - 1)$ lokaal gelijkmatig absoluut convergeert. Wegens Lemma 4.6 is $f_n(z) - 1 = O_R\left(\frac{1}{a_n}\right)^{k+1}$ voor $|z| \leqslant R$ en $|a_n| \geqslant 2R$, zodat de gelijkmatige convergentie in $|z| \leqslant R$ volgt uit de M-test van Weierstrass. □

Lemma 4.6. *Voor alle $k \in \mathbb{N}$ is, voor $|z| \leqslant 1 - \delta$ $(\delta > 0)$*

$$(1 - z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}} = e^{O(z^{k+1})} = 1 + O(z^{k+1})$$

Bewijs. Uit de taylorontwikkeling voor $\log(1 - z)$ volgt

$$\log(1 - z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k} = O(z^{k+1})$$

voor $|z| \leqslant 1 - \delta$, zodat de eerste gelijkheid geldt. Aangezien $e^{h(z)} = 1 + O(h(z))$ als $h(z) = o(1)$, geldt ook de tweede gelijkheid. □

4.1.3 Orde en convergentie-exponent van gehele functies

Wegens de stelling van Liouville is een gehele functie van polynomiale groei zelf een veelterm. We kunnen dus verwachten dat we analoge resultaten hebben voor de gehele functie $g(z)$ die in de Weierstrassfactorisatie (4.1) optreedt, meer bepaald dat als $\log |f(z)|$ begrensd is door een veelterm van graad n, dat dan $g(z)$ een veelterm is van graad hoogstens n. Aangezien f oneindig veel nulpunten kan hebben werken we echter niet zomaar met $\log |f(z)|$, wel met $\log \max_{|z| \leqslant R} |f(z)|$.

Definitie 4.7. *Zij f een gehele functie. De* orde $\omega \in [0, +\infty]$ *van f is het infimum van de reële getallen $\beta \geqslant 0$ waarvoor* $\log \max_{|z| \leqslant R} |f(z)| = O(R^\beta)$. *Zij $a_1, a_2, \dots$ de niet-nul nulpunten van f. De* convergentie-exponent $\tau \in [0, +\infty]$ *van (de rij van nulpunten van) f is het infimum van de reële getallen $\alpha \geqslant 0$ waarvoor $\sum |a_n|^{-\alpha}$ convergeert. Indien f een eindig aantal nulpunten heeft is dus $\tau = 0$. Voor veeltermfuncties is $\omega = \tau = 0$.*

De relatie $\log |f(z)| = O(|z|^\omega)$ kan al of niet waar zijn, net zoals $\sum |a_n|^{-\tau}$ wel of niet kan convergeren. We zullen ook geïnteresseerd zijn in de kleinste $k \in \mathbb{N}$ waarvoor $\sum |a_n|^{-k-1}$ convergeert. Deze voldoet aan $k \leqslant \tau \leqslant k+1$, waarbij $\tau = k+1$ a.s.a. $\tau \in \mathbb{N}$ en $\sum |a_n|^{-\tau}$ convergeert, en $\tau = k$ a.s.a. $\tau \in \mathbb{N}$ en $\sum |a_n|^{-\tau}$ divergeert (tenzij f een eindig aantal nulpunten heeft; dan is $\tau = k = 0$ en convergeert $\sum |a_n|^{-\tau}$). Merk nog op dat het vermenigvuldigen met een veelterm de orde en convergentie-exponent niet beïnvloedt.

Opmerking 4.8. *We zullen* $\log \max_{|z| \leqslant R} |f(z)| = O(R^\beta)$ *ook vaak noteren als* $|f(z)| \leqslant e^{O(|z|^\beta)}$ *(merk op dat dit equivalent is). Echter,* $|f(z)| = e^{O(|z|^\beta)}$ *en* $f(z) = O(e^{|z|^\beta})$ *zijn te sterke voorwaarden: de eerste gaat er bv. van uit dat $f(z) \neq 0$ voor $|z|$ groot genoeg; de tweede laat bv. e^{2z^β} niet toe. Wel equivalent is* $f(z) = O(e^{O(|z|^\beta)})$.

Grenzen op de groei van $|f|$ geven via (4.1) enkel grenzen op het reëel deel van g. Via het Borel-Carathéodery lemma (Lemma 2.16) kunnen we deze wel omzetten naar grenzen op g; i.h.b. hebben we de volgende uitbreiding van de stelling van Liouville:

Lemma 4.9. *Zij f een gehele functie waarvoor* $\Re \mathrm{e}\, f(z) \leqslant o(|z|^n)$, *dan is f een veelterm van graad kleiner dan n.*

Bewijs. Passen we het Borel-Carathéodery lemma (Lemma 2.16) toe met $R = 2|z|$, dan volgt $|f(z)| \leqslant 4 \max_{|s| \leqslant 2|z|} \Re \mathrm{e}\, f(s) \leqslant o(|z|^n)$, zodat het gestelde volgt uit de stelling van Liouville. □

Stelling 4.10 (Factorisatiestelling van Hadamard)**.** *Zij f een gehele functie met orde $\omega < \infty$. Dan heeft f convergentie-exponent $\tau \leqslant \omega$ en indien $k \in \mathbb{N}$ minimaal is zo dat $\sum |a_n|^{-k-1}$ convergeert, dan is in* (4.1) *$g(z)$ een veelterm van graad $h \leqslant \omega$.*

Bewijs. [16] We mogen aannemen dat $f(0) \neq 0$, aangezien vermenigvuldigen met z^m de orde, convergentie-exponent en geldigheid van (4.1) niet beïnvloedt. Wegens Jensens ongelijkheid is het aantal nulpunten in $|z| \leqslant r$ ($r < R$) hoogstens

$$\frac{\log(\max_{|z| \leqslant R} |f(z)| \,/\, |f(0)|)}{\log(R/r)}$$

zodat (met $r = |a_n|$, $R = 2|a_n|$) $n \ll_\varepsilon |a_n|^{\omega+\varepsilon}$ voor $\varepsilon > 0$. Bijgevolg is $|a_n|^{-(\omega+\varepsilon)(1+\varepsilon)} \ll_\varepsilon n^{-1-\varepsilon}$ zodat $\tau \leqslant (\omega+\varepsilon)(1+\varepsilon)$. Omdat ε willekeurig is, is $\tau \leqslant \omega$. Stelling 4.5 is nu toepasbaar; zij $k \in \mathbb{N}$ met $\sum |a_n|^{-k-1}$ convergent. Stel $f_n(z) = e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}$. Zij $R > 0$. Voor $|z| = 2R$ is

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= e^{\Re \mathrm{e}\, g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| |f_n(z)| \\
&\geqslant e^{\Re \mathrm{e}\, g(z)} \prod_{|a_n| > R} \left|1 - \frac{z}{a_n}\right| |f_n(z)| \prod_{|a_n| \leqslant R} |f_n(z)|
\end{aligned}$$

[16] [5, Theorem F2, Theorem F3, p. 54]

aangezien $\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \geqslant \frac{2R}{|a_n|} - 1 \geqslant 1$ voor $|a_n| \leqslant R$. Dus

$$e^{g(z)} \prod_{|a_n|>R} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) f_n(z) \prod_{|a_n|\leqslant R} f_n(z) = O(\exp(O_\varepsilon(R^{\omega+\varepsilon})))$$

voor $|z| = 2R$, en dus ook voor $|z| \leqslant 2R$ wegens het maximumprincipe. De factoren in het eerste product zijn $e^{O(|z|/a_n)^{k+1}}$ voor $|z| \leqslant R/2$ (Lemma 4.6). Bijgevolg is

$$\Re\mathrm{e}\, g(z) + R^{k+1} O\left(\sum_{|a_n|>R} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}\right) + \sum_{|a_n|\leqslant R} \Re\mathrm{e} \log f_n(z) \leqslant O_\varepsilon(R^{\omega+\varepsilon})$$

of dus

$$\Re\mathrm{e}\, g(z) + \sum_{|a_n|\leqslant R} \Re\mathrm{e} \log f_n(z) \leqslant o(R^{k+1}) + O_\varepsilon(R^{\omega+\varepsilon})$$

voor $|z| \leqslant R/2$, waarbij we $\log f_n = \frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k$ noteren. We zouden Lemma 4.9 willen toepassen, maar voor $\sum_{|a_n|\leqslant R} \Re\mathrm{e} \log f_n$ kennen we geen goede afschatting. Geïnspireerd door het bewijs van de stelling van Liouville schatten we de taylorcoëfficiënten van $h_R = g - g(0) + \sum_{|a_n|\leqslant R} \log f_n$ af. De som is een veelterm van graad hoogstens k. Stel $g(z) = \sum b_n z^n$. Wegens Borel-Carathéodery (Lemma 2.16) is dus, gelet op $h_R(0) = 0$, voor $n > k$, $b_n = (o(R^{k+1}) + O_\varepsilon(R^{\omega+\varepsilon}))/(R/2)^n$. Laten we $R \to \infty$, dan volgt dat $b_n = 0$ voor $n \geqslant \max(k+1, \omega + 2\varepsilon)$. Laten we $\varepsilon \to 0$, dan volgt dat $b_n = 0$ voor $n > \max(k, \omega)$. Kiezen we k minimaal, dan is $k < \tau \leqslant \omega$ wegens het eerste deel van de stelling, zodat $\deg g \leqslant \max(k, \omega) = \omega$. □

Opmerking 4.11. *Uit het bewijs blijkt meer algemeen dat als f orde $\omega < \infty$ heeft en $k \in \mathbb{N}$ zo dat $\sum |a_n|^{-k-1}$ convergeert, dan is (4.1) geldig met $g(z)$ een veelterm van graad hoogstens $\max(k, \omega)$. We zullen k echter altijd minimaal kiezen, d.w.z. zo dat $k \leqslant \tau \leqslant k+1$ en $\sum |a_n|^{-k}$ divergeert (als het aantal nulpunten eindig is, kiezen we $k = 0$).*

Als f een gehele functie is met Weierstrassfactorisatie (4.1), k minimaal en g een veelterm, dan zullen we nu steeds $h = \deg g$ noteren. Merk echter op dat g geen veelterm hoeft te zijn; als f eindige orde heeft is dit wel het geval wegens Stelling 4.10. Het omgekeerde is ook waar:

Stelling 4.12. *Zij f een gehele functie met convergentie-exponent $\tau < \infty$ waarvoor (4.1) geldig is met $g(z)$ een veelterm is van graad h. Dan heeft f eindige orde $\omega \leqslant \max(\tau, h)$. Indien een van de volgende voldaan is:*

- $\tau < h$
- $\sum |a_n|^{-\tau}$ *convergeert en* $\tau > 0$

dan is $\log \max_{|z|\leqslant R} |f(z)| = O(R^{\max(\tau,h)})$.

Deze stelling is op zich niet verrassend: de groei van f wordt, zo zien we aan (4.1), bepaald door de groei van g (d.i. $O(|z|^h)$) en de groei van het oneindig product. Het volstaat dus om aan te tonen dat het product $O(e^{O(|z|^{\tau+\varepsilon})})$ is.

Bewijs.[17] We analyseren de groei van $E(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}$ meer precies: voor $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ is wegens Lemma 4.6 $E(z) = e^{O(|z|^{k+1})}$, en dus ook $E(z) = e^{O(|z|^{\theta})}$ voor alle $\theta \leqslant k+1$. Voor $|z| \geqslant \frac{1}{2}$ is, aangezien $z + \cdots + \frac{z^k}{k} \ll z^k$, $E(z) = O(e^{O(|z|^k)+\log|z|}) = O(e^{O(|z|^k)})$ (als $k > 0$), en dus ook $E(z) = O(e^{O(|z|^{\theta})})$ voor alle $\theta \geqslant k$. Nemen we $\theta \in [k, k+1]$, dan is dus $E(z) = O(e^{O(|z|^{\theta})})$ uniform in heel $\mathbb{C}$ (tenzij $k = \theta = 0$). We nemen voor het gemak aan dat $f(0) \neq 0$. Voor $\theta \in [k, k+1]$ is dus

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}\right) = O\left(\exp\left(O(|z|^h) + O(z^{\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{-\theta}\right)\right).$$

Deze bovengrens is slechts eindig indien $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{-\theta}$ convergeert. Aangezien $\tau \in [k, k+1]$ en de som convergeert voor $k+1$ bestaat er altijd zo'n θ (bv. $k+1$). Kiezen we $\theta = \tau + \varepsilon$ (met $\varepsilon = 0$ als $\tau = k+1$ en $\varepsilon > 0$ anders), dan volgt $\omega \leqslant \max(\tau + \varepsilon, h)$ zodat ook $\omega \leqslant \max(\tau, h)$. Indien $\tau < h$ kunnen we $\theta \in]\tau, h[$ kiezen (tenzij $\tau = k+1$; dan kiezen we $\theta = \tau$), en volgt $\log \max_{|z| \leqslant R} |f(z)| = O(R^h)$.
Indien $\sum |a_n|^{-\tau}$ convergeert en $\tau > 0$ kunnen we $\theta = \tau$ kiezen, en volgt $\log \max_{|z| \leqslant R} |f(z)| = O(R^{\max(\tau, h)})$. □

Samengevat is:

Stelling 4.13. *$\omega = \max(\tau, h)$, waarbij de eindigheid van het ene lid dat van het andere impliceert. Verder geldt: als $\omega > 0$ en $\log \max_{|z| \leqslant R} |f(z)| = O(R^{\omega})$ niet geldt, is $\omega = \tau \geqslant h$, $\sum |a_n|^{-\tau}$ divergeert en f heeft oneindig veel nulpunten.*

Bewijs. De gelijkheid (en de impliciete implicaties) volgt uit Stellingen 4.10 en 4.12. De laatste bewering volgt uit Stelling 4.12. □

4.1.4 De logaritmische afgeleide van oneindige producten

Stelling 4.14. *Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ en (f_n) een rij holomorfe functies op D waarvoor $f = \prod f_n$ lokaal gelijkmatig convergeert op D (zodat f holomorf is op D). Dan is $f'/f = \sum f_n'/f_n$ en deze som convergeert lokaal gelijkmatig in het deel van D waar f geen nulpunten heeft.*

Bewijs. Het volstaat om aan te tonen dat $\log f = \sum \log f_n$ lokaal gelijkmatig in het genoemde deel, want dan volgt het te bewijzen door verwisselen van afgeleide en lokaal gelijkmatige limiet. Het bewijs hiervan volgt dezelfde lijnen als dat van Stelling 4.2. Voorzichtigheid is echter geboden bij het nemen van logaritmen. Zij $K \subseteq D$ compact en n_0 zo groot dat $|1 - f_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}$ voor $z \in K$ en $n \geqslant n_0$ (die bestaat wegens de gelijkmatige convergentie van $\prod f_n$ op K). Indien f geen nulpunten heeft op K is $\prod_{n=n_0}^{\infty} |f_n| \geqslant \delta > 0$ op K, en aangezien $\log x$ gelijkmatig continu is voor $x \geqslant \delta$ convergeert ook $\sum_{n=n_0}^{\infty} \Re\mathrm{e} \log f_n$ gelijkmatig op K.
We tonen aan dat ook $\sum_{n=n_0}^{\infty} \Im\mathrm{m} \log f_n$ gelijkmatig convergeert op K. Zij $\theta_N(z)$ de poolhoek van $\prod_{n=n_0}^{N} f_n(z)$ met $\theta(z) - \pi < \theta_N(z) \leqslant \theta(z) + \pi$, waarbij $\theta(z) = \arg \prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z)$. Er bestaan $l_n : K \to \mathbb{Z}$ waarvoor $\sup_K |\theta(z) + 2\pi l_n(z) - \theta_n(z)| < \varepsilon$ voor n groot genoeg, dus $2\pi \sup_K |l_n| \leqslant \varepsilon + \sup_K |\theta - \theta_n| \leqslant \pi + \varepsilon$, zodat $l_n(z) = 0$ op heel K voor n groot genoeg, dus $\theta_n \rightrightarrows_K \theta$. We hebben $\Im\mathrm{m} \sum_{n=n_0}^{N} \log f_n(z) = \theta_N(z) + 2\pi k_N(z)$ voor zekere $k_n : K \to \mathbb{Z}$. Er geldt $2\pi \sup_K |k_{n+1} - k_n| \leqslant \sup_K |\theta_{n+1} - \theta_n| + \sup_K |\Im\mathrm{m} \log f_{n+1}| \to 0$, zodat k_n uiteindelijk gelijk is aan een vaste $k : K \to \mathbb{Z}$, en $\sum_{n=n_0}^{\infty} \Im\mathrm{m} \log f_n = \theta(z) + 2\pi k(z)$, waarbij de gelijkmatige convergentie ven de reekssom volgt uit die van θ_n.

[17] [5, Theorem F1, p. 53]

Samengevat is $g = \sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n$ gelijkmatig convergent, zodat g holomorf is en $e^g = \prod_{n=n_0}^{\infty} f_n$ wegens Stelling 4.2. Ten slotte is $\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_{n_0-1}'}{f_{n_0-1}} + g'$ op K, waarbij $g' = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'/f_n$, gelijkmatig, wegens de gelijkmatige convergentie van $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n$, zodat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'/f_n$ gelijkmatig convergeert naar f'/f op K. □

In het bijzonder vinden we:

Stelling 4.15. *Zij f een gehele functie met Weierstrassfactorisatie* (4.1)*. Dan is*

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{m}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \qquad (\textit{indien } k = 0)$$
$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{m}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right) \qquad (\textit{indien } k = 1).$$

en de sommen convergeren lokaal gelijkmatig in $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Bewijs. Dit volgt meteen uit Stelling 4.14, gebruik makend van (2.1). □

4.2 De gammafunctie

Aangezien het ons doel is om de Riemann-zèta-functie te bestuderen a.d.h.v. de functionele gelijkheid, en Γ hierin optreedt, hebben we goede asymptotische formules voor Γ nodig. Aangezien de polen van Γ gekend zijn (en ook de nulpunten; er zijn er namelijk geen) ligt het voor de hand deze af te leiden uit de Weierstrassfactorisatie van $1/\Gamma$ (die geheel is). Meer bepaald leiden we in Stelling 4.23 de formule van Stirling af voor complexe argumenten. Hoewel we deze strikt genomen niet in haar volle sterkte nodig hebben (zie ook de opmerking na Stelling 4.29) presenteren we hier toch het bewijs, als toepassing op Weierstrassfactorisatie.

Definitie 4.16 (Gammafunctie)**.** *Voor $\sigma > 0$ definiëren we*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du. \tag{4.2}$$

4.2.1 Functionele gelijkheden

In de cursus Complexe Analyse bewezen we:

Eigenschap 4.17.

1. *Γ is holomorf op het halfvlak $\sigma > 0$.*
2. *De recursiebetrekking*
$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \tag{4.3}$$
definieert een analytische uitbreiding van Γ op $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Meer bepaald is Γ meromorf met enkelvoudige polen in $0, -1, -2, \ldots$
3. *Voor $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ is*
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{4.4}$$
4. *Γ heeft geen nulpunten.*

Later zullen we ook nog de volgende gelijkheid nodig hebben:

Stelling 4.18 (Duplicatieformule van Legendre)**.** *Voor* $z \in \mathbb{C} \setminus -\frac{1}{2}\mathbb{N}$ *is*

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z + \tfrac{1}{2}). \tag{4.5}$$

Bewijs. Zie bv. [11]. Het bewijs maakt voor $\sigma > 0$ gebruik van enkele eigenschappen van de Betafunctie $B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du$ (gedefinieerd voor $x, y > 0$; zie cursus Analyse II), maar is elementair. Op het halfvlak $\sigma \leqslant 0$ volgt de gelijkheid vervolgens door eenduidigheid van holomorfe functies. □

4.2.2 Weierstrassproduct van de gammafunctie

Stelling 4.19 (Weierstrassproduct voor de gammafunctie)**.** *Voor* $z \in \mathbb{C}$ *is*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}. \tag{4.6}$$

en het product convergeert lokaal gelijkmatig absoluut in heel $\mathbb{C}$*.*

Bewijs. $1/\Gamma$ is geheel en heeft enkelvoudige nulpunten in $0, -1, -2, \ldots$, dus $\tau = 1$. We tonen aan dat $1/\Gamma$ orde 1 heeft. Noteer $z = \sigma + it$. Voor $\sigma > 0$ is $|\Gamma(z)| \leqslant |\Gamma(\sigma)|$. Stel $M = \max_{\sigma\in[1,2]} |\Gamma(z)| < \infty$. Voor $\sigma \in [-1, 0]$ is (gebruik makend van (4.4))

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| = \left|\frac{\Gamma(1-z)\sin \pi z}{\pi}\right| \leqslant \frac{M}{\pi} |\sin \pi z| = O(e^{O(|z|)}).$$

Voor $\sigma \in [0, 1]$ en $\sigma \in [1, 2]$ is nu achtereenvolgens

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| = \left|\frac{1}{(z-1)\Gamma(z-1)}\right| = O(e^{O(|z|+\log|z|)}) = O(e^{O(|z|)}).$$

Voor $\sigma > 2$ is

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(it + \{\sigma\} + 1)(it + \{\sigma\} + 1) \cdots (it + \{\sigma\} + \lfloor\sigma\rfloor - 1)}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{\Gamma(it + \{\sigma\} + 1)}\right| = O(e^{O(|z|)})\end{aligned}$$

en voor $\sigma < -1$ is ten slotte, gebruik makend van de afschatting voor $\sigma \in [-1, 0]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(it + \lfloor\sigma\rfloor + \{\sigma\})}\right| &= \left|\frac{z(z+1)\cdots(z - \lfloor\sigma\rfloor - 2)}{\Gamma(it + \{\sigma\} - 1)}\right| \\ &\leqslant \frac{|z|^{-\lfloor\sigma\rfloor+1}}{|\Gamma(it + \{\sigma\} - 1)|} = O(e^{O(|z|\log|z|)}).\end{aligned}$$

We besluiten dat de orde $\omega \leqslant 1$ eindig is. Dus $h \in \{0, 1\}$, en omdat $\tau = 1$ is $\omega = 1$. Stel dus

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Omdat Γ in 0 residu 1 heeft, is $B = 0$. Drukken we uit dat $\Gamma(1) = 1$, dan moet

$$e^A \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} = 1,$$

en $\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} = (N+1)e^{-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{N}}$, zodat $A = \lim_{n\to\infty}(H_n - \log(n+1)) = \gamma$. □

Lemma 4.20. *Voor* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *is*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) \tag{4.7}$$

en de som convergeert lokaal gelijkmatig in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Bewijs. Uit Stelling 4.15 en Stelling 4.19 volgt

$$\frac{(1/\Gamma)'(z)}{1/\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$$

waarbij het linkerlid gelijk is aan $-\Gamma'(z)/\Gamma(z)$. □

4.2.3 De formule van Stirling

Lemma 4.21. *Voor* $z \notin \mathbb{R}^-$, $|z| \to \infty$ *is*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} + O_\delta\left(\frac{1}{|z|^2} \right) \tag{4.8}$$

in elk gebied van de vorm $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Bewijs. We vertrekken van de reeksontwikkeling (4.7) van Γ'/Γ. Voor $A > 1$ is

$$\sum_{n \leqslant A} \frac{1}{n} = \gamma + \log A + o(1)$$

en voor vaste z is wegens Eulers sommatieformule (Stelling 1.10),

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant A} \frac{1}{z+n} &= \int_1^A \frac{dx}{z+x} - \int_1^A \frac{\{x\}}{(z+x)^2} dx + \frac{1}{z+1} - \frac{\{A\}}{z+A} \\ &= \log(z+A) - \log(z+1) - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{(z+x)^2} dx + \frac{1}{z+1} + o_z(1). \end{aligned}$$

Omdat $\log A - \log(z+A) = \log \frac{A}{z+A} = o_z(1)$ volgt, door $A \to \infty$, dat

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log(z+1) + \int_1^\infty \frac{\{x\}}{(z+x)^2} dx - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Er geldt $\log(z+1) - \log z = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + O(|z|^{-2})$, dus zoeken we enkel nog een goede benadering van de integraal in het rechterlid:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\{x\}}{(z+x)^2} dt &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{(z+x)^2} + \int_1^\infty \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{(z+x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2(z+1)} + \left[\frac{O(1)}{(z+x)^2} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{O(1)}{(z+x)^3} dx \\ &= \frac{1}{2(z+1)} + O\left(\frac{1}{|z+1|^2} \right) + O\left(\int_1^\infty \frac{dx}{|z+x|^3} \right), \end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van het feit dat $\{x\} - \frac{1}{2}$ een begrensde primitieve heeft. Alles optellen levert, gebruik makend van $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} + O(|z|^{-2})$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) + O\left(\int_1^\infty \frac{dx}{|z+x|^3}\right).$$

Het volstaat nu om $\int_1^\infty \frac{dx}{|z+x|^3}$ af te schatten. Stel $z = \sigma + it$. Voor $|t| \geqslant \delta\,|\sigma|$ is dit

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(t^2 + (\sigma+x)^2)^{3/2}} \overset{x=-\sigma+tu}{=} \frac{1}{t^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

en $t^2(\delta^2+1) \geqslant \delta^2(\sigma^2+t^2)$ zodat $1/t^2 = O_\delta(|z|^{-2})$. Voor $|t| \leqslant \delta\,|\sigma|$ en $\sigma \geqslant 0$ is

$$\int_1^\infty \frac{dx}{|z+x|^3} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{(\sigma+x)^3} = \frac{1}{(\sigma+1)^2} = O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

en, voor $\delta < 1$, $2\sigma^2 > \sigma^2(\delta^2+1) \geqslant \sigma^2 + t^2$ zodat $1/\sigma^2 = O(|z|^{-2})$.
Samengevat is

$$\int_1^\infty \frac{dx}{|z+x|^3} = O_\delta\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

voor $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C} \setminus \{|t|/\delta \leqslant \sigma \leqslant 0\}$ $(\delta > 0)$. □

In Analyse II bewezen we de formule van Stirling voor reële argumenten:

Stelling 4.22 (Formule van Stirling)**.** *Voor $x \in \mathbb{R}^+$ is*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 + o(1)\right). \tag{4.9}$$

(In feite bewezen we $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1+o(1)\right)$, maar m.b.v. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x-\frac{1}{2}} \to 1/e$ volgt (4.9).)
We hebben hier een iets algemener resultaat nodig:

Stelling 4.23 (Formule van Stirling, met restterm, voor complexe argumenten)**.** *Voor $z \notin \mathbb{R}^-$ is*

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + O_\delta\left(\frac{1}{|z|}\right), \tag{4.10}$$

of nog,

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \tag{4.11}$$

in elk gebied van de vorm $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$. Hierin is $\log\Gamma(z) = \int_1^z \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ waarbij de contour bevat is in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.[18]

Bewijs. Dit volgt in essentie door integratie van (4.8). Stel $f(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z) - \log z + \frac{1}{2z}$, dus $f(z) = O_\delta(|z|^{-2})$. Er geldt

$$\begin{aligned}\int_1^z \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}ds &= \int_1^z \left(\log s - \frac{1}{2s} + f(s)\right)ds \\ &= \left[s\log s - s - \frac{1}{2}\log s\right]_1^z + \int_1^z f(s)ds.\end{aligned}$$

[18] Deze $\log\Gamma$ komt dus overeen met de tak van $\log\Gamma$ die reëel is op $\mathbb{R}^+$.

In $\int_1^z f$ nemen we als contour het lijnstuk $[1,z]$. Omdat $f(z) \ll_\delta |z|^{-2}$ is de integraal convergent wanneer we de contour verlengen tot de halfrechte L met beginpunt 1 die door z gaat. Er geldt

$$\int_1^z f = \int_L f + O_\delta\left(\int_{L\setminus[1,z]} \frac{ds}{|s|^2}\right) \overset{s=1+x(z-1)}{=} C_z + O_\delta\left(\int_1^\infty \frac{(z-1)dx}{|1+x(z-1)|^2}\right)$$

en $|1+x(z-1)|^2 \gg x^2|z|^2$, zodat de O-term $O_\delta\left(\frac{1}{z}\int_1^\infty x^{-2}dx\right) = O_\delta(1/|z|)$ is. Omdat f holomorf is in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ en $f(z) = o_\delta(1/|z|)$ is wegens de residustelling $C_z = C$ dezelfde voor alle $z \notin \mathbb{R}^-$: voor $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}^-$ is $C_{z_1} - C_{z_2} = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f$ met Γ_R een cirkelboog met straal R en middelpunt 1 die bevat is in een vast deel van $\mathbb{C}$ (d.w.z. onafhankelijk van R) waarop $f(z) = o(1/|z|)$ (uniform), zodat $\left|\int_{\Gamma_R} f\right| = o(1)$, dus $C_{z_1} = C_{z_2}$. Er geldt dus

$$\int_1^z \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}ds = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + 1 + C + O_\delta\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

met $C = \int_1^\infty f$. Dus

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{1+C}e^{O_\delta(1/|z|)}$$

met $e^{O_\delta(1/|z|)} = 1 + O_\delta(1/z)$. Uit (4.9) (geldig voor $x \in \mathbb{R}^+$) volgt nu $1 + C = \log\sqrt{2\pi}$. $\square$

4.3 De Riemann-xi-functie

Uit de integraalrepresentatie van ζ (Stelling 2.20) hebben we een analytische voorzetting van ζ voor $\sigma > 0$. M.b.v. contourintegratie kan men bewijzen:

Stelling 4.24 (Functionele gelijkheid van de zèta-functie)**.** *Voor $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ is*

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s) \tag{4.12}$$

en deze gelijkheid definieert een analytische voortzetting van ζ op het halfvlak $\sigma \leqslant 0$.

Bewijs. Zie bv. de cursus Complexe Analyse, of [5, Theorem 14, p. 41]. Het bewijs bestaat eruit in de identiteit $\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$ (een eenvoudig gevolg van verwisselen van reeks (afkomstig van ζ) en integraal (afkomstig van Γ)) de contour zodanig te vervormen dat het volstaat de residu's van de polen ($2k\pi i$ met $k \in \mathbb{Z}$) te sommeren. De reekssom van deze residu's levert precies $\zeta(1-s)$ op, op enkele factoren na. $\square$

Opmerking 4.25. *Er zijn nog andere manieren om analytische voortzettingen van ζ te construeren. Uit de definitie van ζ volgt voor $\sigma > 1$ dat*

$$\zeta(s) - 2\cdot 2^{-s}\zeta(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + 5^{-s} - 6^{-s} + \cdots. \tag{4.13}$$

Het rechterlid in (4.13) *is holomorf voor $\sigma > 0$ (aangezien $n^{-s} - (n+1)^{-s} \ll sn^{-s-1}$ wegens de middelwaardestelling, zodat de reeks lokaal gelijkmatig convergeert). Bijgevolg definieert* (4.13) *een analytische uitbreiding voor $\sigma > 0$.*

Gevolg 4.26. *ζ heeft enkelvoudige nulpunten in $-2, -4, \ldots$ (de zogeheten 'triviale nulpunten'). Alle andere nulpunten hebben reëel deel in $[0,1]$ en liggen symmetrisch t.o.v. de lijn $\sigma = \frac{1}{2}$. Er zijn geen nulpunten in $\mathbb{R}^+$.*

Bewijs. Zij $z \in \mathbb{C}$ een nulpunt van ζ. We weten uit Stelling 1.4 dat $\Re\mathrm{e}\, z \leqslant 1$. Stel $z \in \mathbb{R}^-$. Omdat $\Gamma(s)\zeta(s)$ niet-nul is voor $\sigma > 1$, volgt uit (4.12) (voor $s = 1 - z$) dat $\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0$, dus $z \in -2\mathbb{N}$, en omgekeerd is ook elk zo'n punt een nulpunt (behalve eventueel 0). We bekijken 0 apart: uit (4.12) voor $s \to 1$ zien we, aangezien ζ een enkelvoudige pool met residu 1 heeft in 1 en $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)/(s-1) \to -\pi/2$, dat $\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$.
Aangezien $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)$ geen nulpunten en polen heeft in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, volgt ook de tweede uitspraak. De laatste uitspraak volgt uit (4.13), aangezien $n^{-s} - (n+1)^{-s} > 0$ voor $s \in \mathbb{R}^+$. □

Riemann had het idee om uit de functionele gelijkheid (4.12) een 'symmetrische' holomorfe functie te construeren: uit (4.5) volgt $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)2^{s-1}\pi^{-1/2}\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})\zeta(s)$. Uit $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right)$ en (4.4) volgt

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\frac{\pi}{\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+s}{2}\right)}2^{s-1}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)\zeta(s),$$

of nog,

$$\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \pi^{-s-1/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

$\Gamma(s/2)$ heeft enkelvoudige polen in $0, -2, -4, \ldots$ en $\zeta(s)$ heeft enkelvoudige nulpunten in $-2, -4, \ldots$ Het linkerlid heeft dus een enkelvoudige pool in 1, het rechterlid in 0. Links en rechts vermenigvuldigen met $s(s-1)$ levert:

Definitie 4.27 (Riemann-xi-functie)**.**

$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s). \tag{4.14}$$

Uit bovenstaande constructie volgt nu:

Stelling 4.28. *ξ is een gehele functie en voldoet aan $\xi(s) = \xi(1-s)$. De nulpunten van ξ zijn precies de niet-triviale nulpunten van ζ (met dezelfde multipliciteit), en liggen dus in de strook $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.*

Ook zien we dat $\xi(\sigma) \in \mathbb{R}$ voor $\sigma \in \mathbb{R}$ (wegens Stelling 2.18, aangezien $\xi(\sigma)$ alvast reëel is voor $\sigma > 1$).

4.3.1 Weierstrassproduct van de xi-functie

Stelling 4.29. *ξ heeft orde $\omega = 1$. Meer bepaald is*

$$\log \max_{|s|=R} |\xi(s)| = \frac{1}{2}R\log R + O(R).$$

Bewijs.[19] Aangezien $\xi(s) = \xi(1-s)$ volstaat het ξ af te schatten voor $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$. Voor zulke s is

$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = O(|s|^2)e^{O(|s|)}\Gamma(\tfrac{s}{2})O(|s|)$$

waarbij we $\zeta(s)$ hebben afgeschat met Lemma 3.3. (Zulke afschatting is enkel geldig voor s buiten een vaste omgeving van de pool (d.i. 1), maar omdat ξ geheel is, geldt de uiteindelijke

[19] [5, Theorem 17, p. 56]

afschatting toch voor alle s met $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$. Tenslotte volstaat het wegens het maximumprincipe een afschatting te kennen voor grote waarden van $|s|$.) Uit (4.10) volgt nu

$$|\xi(s)| \leqslant e^{O(|s|)} \exp(\tfrac{s}{2} \log \tfrac{s}{2} + O(|s|)) = \exp(\tfrac{1}{2} s \log s + O(|s|))$$

zodat $\log \max_{|s|=R, \sigma \geqslant 1/2} |\xi(s)| \leqslant \frac{1}{2} R \log R + O(R)$. Anderzijds is, aangezien $\zeta(\sigma) \geqslant 1$ voor $\sigma > 1$,

$$\xi(R) \geqslant 1 \cdot \pi^{-R/2} \Gamma(\tfrac{R}{2}) \cdot 1 = \pi^{-R/2} e^{\frac{R}{2} \log \frac{R}{2} + O(R)}$$

zodat $\log \max_{|s|=R, \sigma \geqslant 1/2} |\xi(s)| \geqslant \log \xi(R) \geqslant \frac{1}{2} R \log R + O(R)$. Om dezelfde afschatting te bekomen voor $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$ kunnen we in principe niet zomaar $\xi(s) = \xi(1-s)$ gebruiken, aangezien de lijn $\sigma = 1/2$ geen spiegelas is van de cirkel $|s| = R$. De cirkel $|s| = R$ is wel bevat in het gebied bepaald door de cirkelboog $\{|s| = R+1\} \cap \{\sigma \geqslant \frac{1}{2}\}$ en de spiegeling ervan t.o.v. de lijn $\sigma = \frac{1}{2}$, zodat

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} R \log R + O(R) &\leqslant \log \max_{|s|=R} |\xi(s)| \\ &\leqslant \log \max_{\substack{|s|=R+1 \\ \sigma \geqslant 1/2}} |\xi(s)| = \frac{1}{2}(R+1)\log(R+1) + O(R),\end{aligned}$$

waarbij de tweede ongelijkheid volgt uit het maximumprincipe. Het gestelde volgt. □

Opmerking 4.30. *De afschatting $\Gamma(s) \leqslant e^{s \log s + O(s)}$ kan ook analoog als in het bewijs van Stelling 4.19 bekomen worden, gebruik makend van $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ en wetende dat Γ begrensd is in bv. de strook $\frac{1}{2} \leqslant \Re\mathrm{e}\, s \leqslant 2$. We hadden hier dus niet de volledige kracht van de formule van Stirling nodig. (Voor de ondergrens hebben we enkel de formule van Stirling voor reële argumenten nodig, en zelfs die niet in haar meest gedetailleerde vorm.) Merk nog op dat de factor $\Gamma(\frac{s}{2})$ dominant is.*

Gevolg 4.31. *ξ heeft oneindig veel nulpunten, $\sum_\rho |\rho|^{-\alpha}$ convergeert a.s.a. $\alpha > 1$ (de som gaande over de nulpunten van ξ, met multipliciteit) en er bestaan $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ waarvoor*

$$\xi(s) = e^{b_0 + b_1 s} \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}. \tag{4.15}$$

Ook is

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = b_1 + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{4.16}$$

en

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = b_1 + \frac{1}{2}\log \pi - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{4.17}$$

waarbij de som lokaal gelijkmatig convergeert in $\mathbb{C} \setminus \{\rho \mid \xi(\rho) = 0\}$.

Bewijs. De eerste beweringen volgen uit Stelling 4.13, aangezien $\log \max_{|s|=R} |\xi(s)| \neq O(R)$. De Weierstrassfactorisatie (4.15) volgt uit de factorisatiestelling van Hadamard (Stelling 4.10). Nu volgt (4.16) uit Stelling 4.15. Uit de definitie van ξ (zie (4.14)) volgt ten slotte dat $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} e^{\frac{1}{2} s \log \pi} \frac{1}{\Gamma(s/2+1)} \xi(s)$, en dus (4.17). □

Opmerking 4.32. *Aangezien (wegens Stelling 2.18) de nulpunten symmetrisch liggen t.o.v. de reële as (met dezelfde multipliciteit) is het product in (4.15) ook nog te schrijven als $\prod_{\Im\mathrm{m}\, \rho > 0} \left(1 - s^2/\rho^2\right)$. (Gevolg 4.26 zegt dat er geen reële nulpunten zijn.)*

Hoewel een interessant resultaat, is het voor het bewijs van de priemgetalstelling dat we presenteren, van geen belang dat ξ oneindig veel nulpunten heeft.

4.3.2 Een nulpuntvrij gebied van de zèta-functie

Op dit punt beschikken we over gelijkaardige informatie als die in Lemma 3.4: daarin hadden we een benadering van de logaritmische afgeleide van ζ door haar polen in de niet-triviale nulpunten van ζ; nu beschikken we over een gelijkaardig resultaat, maar dan expliciet.
Zo vinden we een alternatief bewijs van Stelling 3.8:

Stelling 4.33. *Voor zekere $c > 0$ heeft $\zeta(s)$ geen nulpunten in het gebied $\sigma > 1 - c/\log(|t|+2)$.*

Het bewijs maakt opnieuw gebruik van de 3–4–1-ongelijkheid voor ζ'/ζ (Lemma 3.6).

Bewijs.[20] Stel

$$f(s) = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \quad \text{en} \quad g(s) = -b_1 - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right),$$

zodat wegens (4.17) $f(s) = g(s) + \zeta'(s)/\zeta(s)$. Voor $\sigma > 1$ is nu wegens de 3–4–1-ongelijkheid (Lemma 3.6)

$$\Re\mathrm{e}(3f(\sigma) + 4f(\sigma+ti) + f(\sigma+2ti)) \leqslant \Re\mathrm{e}(3g(\sigma) + 4g(\sigma+ti) + g(\sigma+2ti)). \tag{4.18}$$

De functie g is holomorf op het halfvlak $\sigma \geqslant 0$ met uitzondering van een pool in $s = 1$. Voor bv. $|t| \geqslant 0.9$ en $1 < \sigma \leqslant 2$ is, wegens de afschatting (4.8) van Γ'/Γ, het rechterlid hoogstens $3/(\sigma-1) + C\log(|t|+2)$ voor zekere $C > 0$. Zij $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ een nulpunt van ξ. Voor het linkerlid maken we gebruik van

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}\, f(s) &= \sum_{\rho} \Re\mathrm{e} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \\ &= \sum_{\rho=\beta+i\gamma} \left(\frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2} + \frac{\beta}{|\rho|^2} \right) \\ &> \frac{\sigma-\beta_0}{|s-\rho_0|^2} = \frac{\sigma-\beta_0}{(\sigma-\beta_0)^2 + (t-\gamma_0)^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

(aangezien elke $\beta \leqslant 1$ wegens Stelling 1.4) zodat het linkerlid in (4.18) minstens gelijk is aan

$$\frac{4(\sigma-\beta_0)}{(\sigma-\beta_0)^2 + (t-\gamma_0)^2}.$$

(De reden waarom we enkel de term afkomstig van $4\,\Re\mathrm{e}\, f(\sigma+ti)$ behouden, is dat die in zekere zin het grootst is in de veronderstelling dat $1-\beta_0$ groot is; dit dankzij de factor 4.) Stel nu $t = \gamma_0$, dan volgt

$$\frac{4}{\sigma-\beta_0} - \frac{3}{\sigma-1} \leqslant C\log(|\gamma_0|+2),$$

d.i. (3.2). De rest van het bewijs kan nu volledig analoog als in dat van Stelling 3.8. Voor $|t| \leqslant 0.9$ kunnen we terug gebruik maken van bv. Stelling 3.7. □

[20] [5, Theorem 19, p. 58]

5 De priemgetalstelling via de Perronformule

Om een asymptotische formule voor $\psi(x)$ te verkrijgen vertrekken we van de Perronformule (2.4) met bovengrens op de restterm (2.7). Deze is echter niet controleerbaar als x dicht bij een natuurlijk getal ligt; dus kiezen we in wat volgt $x = N + 1/2$ ($N \in \mathbb{N}$). Voor zo'n x is voor $\sigma_0 > 1$ wegens Stelling 2.13 met de bovengrens (2.7) voor $R(T)$,

$$\psi(x) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds + R(T) \tag{5.1}$$

met

$$|R(T)| \leqslant \frac{2^{\sigma_0}}{\pi T} \sum_{\substack{x/2<n<2x \\ n \neq x}} |\Lambda(n)| \frac{x}{|x-n|} + \frac{x^{\sigma_0}}{\pi T \log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{\sigma_0}}. \tag{5.2}$$

Om de integraal goed te kunnen afschatten, moeten we de groei van ζ'/ζ kennen in het (nulpuntvrije) gebied waar we de contour willen kiezen, d.i. in het gebied uit Stelling 3.8 en Stelling 4.33. Voor onze doeleinden volstaat het te weten dat $\zeta'(s)/\zeta(s) = O(\log^K |t|)$ voor zekere $K > 0$, in dergelijk gebied. In wat volgt presenteren enkele bewijzen, voor $K = 1$ en $K = 2$.

5.1 Asymptotiek van de zèta-functie

Nu we begrenzingen kennen voor de nulpunten van ζ, kunnen we Lemma 3.4 "in de omgekeerde richting" toepassen om die informatie terug om te zetten naar informatie over de groei van ζ'/ζ. Verderop, in Stelling 5.4, geven we een bewijs van een dergelijke afschatting dat geen gebruik maakt van Lemma 3.4 (met een iets zwakker resultaat tot gevolg).

Lemma 5.1. *Zij c zoals in Stelling 3.8. Voor $\sigma \geqslant 1 - c/(2\log(|t|+2))$ is*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\log |t|) \tag{5.3}$$

(gelijkmatig voor $|t| \to \infty$).

Figuur 5.1 schetst de situatie.

Bewijs.[21] Aangezien $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leqslant |\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)| \ll 1/(\sigma-1)$ voor $\sigma > 1$ is (5.3) duidelijk voor $\sigma \geqslant 1 + 1/\log(|t|+2)$, i.h.b voor $s_1 = 1 + 1/\log(|t|+2) + it$. Zij nu s zoals in de opgave en met $\sigma \leqslant 1 + 1/\log(|t|+2)$. Gebruik makend van Lemma 3.4 is

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s_1) = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{s_1 - \rho} \right) + O(\log |t|)$$

waarbij de som gaat over de nulpunten van ζ in de schijf $|z - (3/2 + it)| \leqslant 0.8$. We proberen op deze manier aan te tonen dat $\zeta'(s)/\zeta(s)$ "naar oneindig meegetrokken wordt" door $\zeta'(s_1)/\zeta(s_1)$. Voor zo'n ρ geldt

$$\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{s_1-\rho} = \frac{s_1 - s}{(s-\rho)(s_1-\rho)} \ll \frac{1/\log|t|}{|s-\rho|\,|s_1-\rho|}.$$

[21] [7, Theorem 6.7, p. 174]

We tonen aan dat $s-\rho \gg s_1-\rho$: omdat

$$\begin{aligned} s-\rho \gg \Re\mathrm{e}(s-\rho) &\geqslant -\frac{c/2}{\log(|t|+2)}+\frac{c}{\log(|\Im\mathrm{m}\,\rho|+2)} \\ &\geqslant -\frac{c/2}{\log(|t|+2)}+\frac{c}{\log(|t|+0.8+2)} \gg 1/\log|t| \end{aligned} \tag{5.4}$$

en $(s_1-\rho)-(s-\rho)=\Re\mathrm{e}(s_1-s) \ll 1/\log|t|$ is $\frac{s_1-\rho}{s-\rho}-1 \ll 1$, dus $s_1-\rho \ll s-\rho$. Dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{s_1-\rho} &\ll \frac{1}{|s_1-\rho|^2\log|t|} \\ &= \Re\mathrm{e}\,\frac{1}{s_1-\rho}\cdot\frac{1}{\Re\mathrm{e}(s_1-\rho)\log|t|} \ll \Re\mathrm{e}\,\frac{1}{s_1-\rho}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

(De reden waarom we niet gewoon $\frac{1}{|s_1-\rho|^2\log|t|} \leqslant \log|t|$ gebruiken en dit vermenigvuldigen met het aantal ρ's, is dat we geen goede bovengrens kennen voor dat aantal. Uit Jensens ongelijkheid volgt wel de bovengrens $O(\log|t|)$, maar deze extra factor willen we niet.)
Tot slot is, opnieuw wegens Lemma 3.4 en gelet op de geldigheid van (5.3) voor s_1,

$$\sum_\rho \Re\mathrm{e}\,\frac{1}{s_1-\rho} \ll \frac{\zeta'}{\zeta}(s_1)+O(\log|t|)=O(\log|t|)$$

zodat $\zeta'(s)/\zeta(s)-\zeta'(s_1)/\zeta(s_1)=O(\log|t|)$. □

Opmerking 5.2. *Hoewel* (5.5) *kan vergroot worden tot* $|s_1-\rho|^{-1}$, *is het cruciaal om in de laatste stap met* $\Re\mathrm{e}(s_1-\rho)^{-1}$ *te werken. Zoniet zouden we een bovengrens moeten kennen op* $\sum_\rho |s_1-\rho|^{-1}$, *waarbij de bijdragen van de imaginaire delen problematisch zijn: de enige denkbare bovengrens daarvoor is* $\sum_\rho 0.8\,|s_1-\rho|^{-2}$, *wat we op zijn best kunnen afschatten door* $\sum_\rho 0.8\log^2|t| = O(\log^3|t|)$. *Voor wat volgt volstaat dit, maar toch is het interessant om een betere restterm te hebben.*

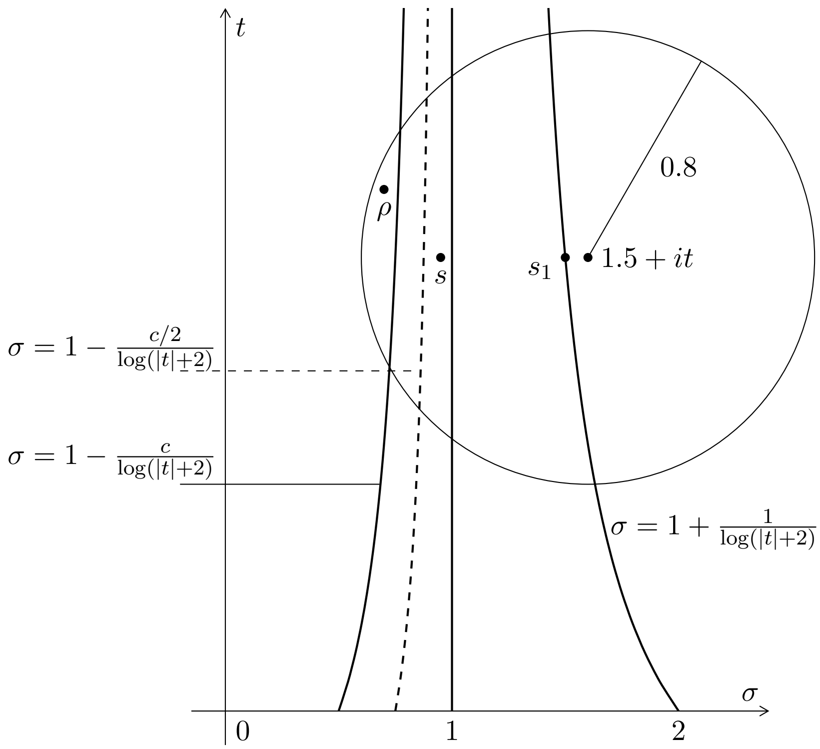
Voor het gemak hebben we in de opgave van Lemma 5.1 σ beperkt tot waarden groter dan $1-c/(2\log(|t|+2))$. De enige plaats in het bewijs waar we gebruiken dat deze grenswaarde strikt in het nulpuntvrije gebied van Stelling 3.8 bevat is, is bij het aantonen dat $s-\rho \gg s_1-\rho$, meer bepaald in de laatste afschatting in (5.4). Het is dus duidelijk dat de factor $\frac{1}{2}$ in de noemer mag vervangen worden door $\alpha < 1$ willekeurig dicht bij 1. In feite werkt hetzelfde bewijs om meer algemeen het volgende aan te tonen:

Stelling 5.3. *Stel dat* ζ *geen nulpunten heeft in het gebied* $\sigma > 1-\eta(|t|)$, *met* $0<\eta(|t|)\leqslant\frac{1}{4}$ *en* $\eta(t)\asymp\eta(t+\delta)$ *voor* $\delta \leqslant 0.8$. *Dan is voor elke* $\alpha<1$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=O\left(\log|t|+\tfrac{1}{\eta(|t|)}\right) \tag{5.6}$$

gelijkmatig voor $|t|\to\infty$ *in het gebied* $\sigma \geqslant 1-\alpha\eta(|t|)$.

Bewijs. Analoog als voor Lemma 5.1: Voor $\sigma \geqslant 1+\eta(|t|)$ geldt het zeker. Stel $s_1=1+\eta(t)+it$ en zij s met $\sigma \leqslant 1+\eta(|t|)$. Aangezien $\sigma \geqslant 1-\eta(|t|) \geqslant \frac{3}{4}$ kunnen we terug gebruik maken van Lemma 3.4. Het verschil tussen $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ en $\frac{\zeta'}{\zeta}(s_1)$ is $O(\log|t|)$ plus de som $\sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{s_1-\rho}\right)$ die loopt over welbepaalde nulpunten van ζ. M.b.v. $s-\rho \gg s_1-\rho$ (het bewijs hiervan is analoog) is die som $\ll \sum_\rho \Re\mathrm{e}\,\frac{1}{s_1-\rho} = O\left(\log|t|+\frac{1}{\eta(|t|)}\right)$. (De (zwakke) voorwaarde $\eta(t)\asymp\eta(t+\delta)$ is nodig voor de analoge afschattingen aan (5.4).) □



Figuur 5.1: Schets bij Lemma 5.1

Om de restterm hierin te verbeteren, zijn we in de eerste plaats geïnteresseerd in de term $O(\log|t|)$, aangezien de andere term van kleinere orde zal zijn indien betere nulpuntvrije gebieden dan die in Stelling 3.8 gekend zijn. (In Stelling 5.13 geven we een voorbeeld van zo'n gebied.) De term $O(\log|t|)$ komt rechtstreeks van Lemma 3.4, waarin de restterm op haar beurt rechtstreeks volgt uit afschattingen van ζ in het gebied $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ (hier via Lemma 3.3), of door wat te sleutelen aan de constanten in Lemma 3.4, in een zeker halfvlak $\sigma \geqslant \sigma_0 < 1$. Zulke afschattingen zijn echter niet voor de hand liggend; zo is er bijvoorbeeld de (onbewezen) Lindelöf-hypothese, die stelt dat $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O_\varepsilon(t^\varepsilon)$ voor alle $\varepsilon > 0$. In Stelling 5.17 geven we een elementair bewijs van een verbetering van de $O(t)$ afschatting uit Lemma 3.3, en schetsen we hoe nog betere afschattingen kunnen worden bekomen.
Het moet gezegd worden dat Lemma 3.1 (en i.h.b. Lemma 3.4) vrij krachtig is aangezien ze geen gebruik maakt van de analyticiteit van f'/f, wel van die van f. In Stelling 5.4 illustreren we dit door een zwakkere versie van Stelling 5.3 te bewijzen, met een gelijkaardige bewijsmethode maar zonder gebruik te maken van Lemma 3.4:

Stelling 5.4. *Stel dat ζ geen nulpunten heeft in het gebied $\sigma > 1-\eta(|t|)$, met $0 < \eta(|t|) \leqslant \frac{1}{2}$, η dalend, continu afleidbaar en $\eta'(|t|) \to 0$. Dan is voor elke $0 < \alpha < 1$*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\left(\frac{\log|t|}{\eta(|t|)} + \frac{1}{\eta^2(|t|)}\right) \tag{5.7}$$

gelijkmatig voor $|t| \to \infty$ in het gebied $\sigma \geqslant 1 - \alpha\eta(|t|)$.

Indien $\eta(|t|) \gg 1/\log|t|$ is de O-term dus $O(\log^2|t|)$.
Het bewijs lijkt sterk op dat van Lemma 5.1 (en Stelling 5.3) en steunt, net als Lemma 3.1, op het Borel-Carathéodery lemma (Lemma 2.16), maar gaat in tegenstelling tot Lemma 3.1 uit

van de analyticiteit van ζ'/ζ op zekere gebieden. Aangezien dergelijke gebieden steeds kleiner moeten worden gekozen naarmate $|t| \to \infty$ (door de mogelijke nulpunten van ζ), krijgen we een extra factor $1/\eta(|t|)$ in het eindresultaat.

Bewijs.[22] Aangezien $\zeta'(\overline{s})/\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta'(s)/\zeta(s)}$ (zie Lemma 2.19) mogen we veronderstellen dat $t > 0$. Aangezien voor $\sigma > 1$, $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leqslant \zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$ en ζ'/ζ een enkelvoudige pool heeft voor $s = 1$, is voor $\sigma \geqslant 1 + \alpha\eta(|t|)$ zeker $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll 1/\eta(t) \ll 1/\eta^2(t)$. We zullen Borel-Carathéodery toepassen op (een translatie van) $\log\zeta$ (zoals gedefinieerd in Stelling 2.10) om een grens op $(\log\zeta)' = \zeta'/\zeta$ te bekomen. Zij s zoals in de opgave en stel $s_0 = 1 + \alpha\eta(t) + it$. Kies als kleine cirkel die met centrum s_0 die door $1 - \alpha\eta(t) + it$ gaat (en dus s bevat) en als grote cirkel die met centrum s_0 en door bv. $1 - \frac{1}{2}(1+\alpha)\eta(t) + it$ (het midden tussen $1 - \eta(t) + it$ en $1 - \alpha\eta(t) + it$). Noem hun stralen resp. $r = 2\alpha\eta(t)$ en $R = \frac{1}{2}(1 + 3\alpha)\eta(t)$. Als de grote cirkel binnen het gebied $\sigma > 1 - \eta(|t|)$ ligt (dit tonen we later aan), is $\log\zeta$ er holomorf. Voor $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ is wegens Lemma 3.3 $\zeta(s) = O(t)$, zodat $\Re\log\zeta(s) = \log|\zeta(s)| \leqslant C + \log t \ll \log t$. Ook is $\Re\log\zeta(s_0) = \log|\zeta(s_0)| \ll 1/(\alpha\eta(t))$, gebruik makend van de Dirichletreeks (2.2). Wegens Borel-Carathéodery (Lemma 2.16) met $f(z) = \log\zeta(s_0 + z) - \log\zeta(s_0)$ is nu

$$\left|f'(s)\right| \ll \frac{2R}{(R-r)^2}\left(\log t + \frac{1}{\alpha\eta(t)}\right) \asymp \frac{\log t}{\eta(t)} + \frac{1}{\eta^2(t)}$$

aaangezien $r \asymp R \asymp \eta(t)$ (en merk op hoe het feit dat de cirkels klein worden gekozen leidt tot een extra factor $\frac{1}{\eta(t)}$). We gaan nu nog na dat de grote cirkel inderdaad in het gebied $\sigma > 1 - \eta(|t|)$ ligt. Omdat η dalend is, is dit het geval zodra $1 - \frac{1}{2}(1+\alpha)\eta(t) + it + iR$ in dat gebied ligt, m.a.w. als $1 - \frac{1}{2}(1+\alpha)\eta(t) > 1 - \eta(t+R)$, dus $\eta(t+R) > \frac{1}{2}(1+\alpha)\eta(t)$. Aangezien $\frac{1}{2}(1+\alpha) < 1$ zal dit het geval zijn indien $\eta(t+R) \approx \eta(t)$, of dus als $\eta'(t) \approx 0$: wegens de middelwaardestelling is het linkerlid $\eta(t) + R\eta'(\tau)$ (zekere $\tau \in [t, t+R]$), dus moet $1 + \frac{1}{2}(1+3\alpha)\eta'(\tau) > \frac{1}{2}(1+\alpha)$, wat geldt voor t groot genoeg aangezien $\eta'(t) \to 0$. (In feite volstaat het dat $\eta'(t) > \frac{\alpha-1}{3\alpha+1}$ voor t groot genoeg.) □

Opmerking 5.5. *Zowel in Stelling 5.3 als Stelling 5.4 volstaat het dat de voorwaarden op η vervuld zijn voor voldoende grote $|t|$: door de waarden van η voor kleine $|t|$ te veranderen zo dat η wel aan de voorwaarden voldoet, zijn de stellingen terug van toepassing en geldt dezelfde conclusie.*

5.2 De de la Vallée-Poussin-restterm in de priemgetalstelling

We beschikken nu over al het nodige materiaal om de Perronformule te gebruiken: een niet-triviaal nulpuntvrij gebied van ζ en een afschatting voor ζ'/ζ.

Stelling 5.6. *Er bestaat een constante $c > 0$ waarvoor*

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \tag{5.8}$$

Vooraf een opmerking over de restterm: stellen we $x = e^{t^2}$, dan is $e^{c\sqrt{\log x}} = e^{ct}$. Voor alle $M, \varepsilon > 0$ is $t^M \ll e^{ct} \ll e^{\varepsilon t^2}$, dus

$$(\log x)^M \ll e^{c\sqrt{\log x}} \ll x^{\varepsilon}.$$

De restterm is dus beter dan $O\left(x/(\log x)^M\right)$ maar slechter dan $O\left(x^{1-\varepsilon}\right)$ voor alle $M, \varepsilon > 0$. Ook is $xe^{-c\sqrt{\log x}}$ stijgend voor x voldoende groot.

[22] [5, Theorem 20, p. 62]

Bewijs.[23] Stel $x = N + 1/2$. In (5.2) geldt, aangezien $\Lambda(n) \leqslant \log n \leqslant \log x$, voor $\sigma_0 > 1$ en voor de termen in de eerste som geldt dat $\frac{1}{2} \leqslant |x-n| < x$,

$$|R(T)| \ll \frac{2^{\sigma_0} x \log x}{T} \sum_{n<x} \frac{1}{n} + \frac{x^{\sigma_0}}{T} \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)$$
$$\ll \frac{2^{\sigma_0} x \log^2 x}{T} + \frac{x^{\sigma_0}}{T(\sigma_0 - 1)}. \tag{5.9}$$

Zij $\sigma_1 < 1$. We vervormen de contour in (5.1) tot de drie lijnstukken $L_1 = [\sigma_0 - iT, \sigma_1 - iT]$, $L_2 = [\sigma_1 - iT, \sigma_1 + iT]$ en $L_3 = [\sigma_1 + iT, \sigma_0 + iT]$. Wegens de residustelling is

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1 \cup L_2 \cup L_3} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} ds - \operatorname{res}_{s=1} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}$$

waarbij het residu gelijk is aan $-x$, aangezien ζ'/ζ er residu -1 heeft. Aangezien we Lemma 5.1 willen toepassen om de integraal in het rechterlid af te schatten, stellen we $\sigma_1 = 1 - d/\log T$ (met $d < c/2$ zodat $\sigma_1 \geqslant 1 - c/(2\log(T+2))$ voor voldoende grote T). Voor T voldoende groot is dan, over L_1 en L_3,

$$\int_{L_1, L_3} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} ds \ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \log T \frac{x^\sigma}{|s|} d\sigma \leqslant \frac{\log T}{T} x^{\sigma_0}(\sigma_0 - \sigma_1). \tag{5.10}$$

Over L_2 willen we ook de afschatting (5.3) gebruiken. Echter, σ_1 zal uiteindelijk dicht bij 1 liggen, terwijl (5.3) niet uniform is op het hele halfvlak $\sigma < 1$. Ze is wel uniform op bv. $\mathbb{C} \setminus B(1,1)$; daarom splitsen we de integraal op en bekijken we de contour $L_2 \cap \{|t| \leqslant 1\}$ apart:

$$\begin{aligned}
\int_{L_2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} ds &= \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 - i} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} ds + \int_{\sigma_1 - i}^{\sigma_1 + i} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} ds + \int_{\sigma_1 + i}^{\sigma_1 + iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} ds \\
&\ll \int_{-\sigma_1 - iT}^{-\sigma_1 - i} \log T \frac{x^{\sigma_1}}{t}\, |ds| + \int_{\sigma_1 - i}^{\sigma_1 + i} \frac{1}{1-\sigma_1}\frac{x^{\sigma_1}}{|s|}\, |ds| + \int_{-\sigma_1 - iT}^{-\sigma_1 - i} \log T \frac{x^{\sigma_1}}{t}\, |ds| \\
&\leqslant x^{\sigma_1} \log T \int_1^T \frac{dt}{t} + \frac{x^{\sigma_1}}{1-\sigma_1}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1} + x^{\sigma_1}\log T \int_1^T \frac{dt}{t} \\
&= 2x^{\sigma_1}\log^2 T + \frac{2x^{\sigma_1}}{1-\sigma_1} = 2x \cdot x^{-d/\log T}\left(\log^2 T + \frac{\log T}{d}\right).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

We bepalen nu $\sigma_0 > 1$ en T zo dat (5.9), (5.10) en (5.11) een goede restterm opleveren. Die laatste is de enige die ons tegenhoudt om $T \gg x^\varepsilon$ te kiezen. We willen o.a. $x^{\sigma_0}/T = o(x)$ klein houden, dus omdat $T \ll x^\varepsilon$ moet σ_0 dalend zijn in x en steeds dichter bij 1 gaan; stel $\sigma_0 = 1 + 1/S$. Omdat $T \ll x^\varepsilon$ en $Sx^{1/S}/T = o(1)$ (wegens de tweede term in (5.9)) moet $Sx^{1/S} \ll x^\varepsilon$ voor alle $\varepsilon > 0$. Een mogelijkheid is $S = \log x$ (daar $x^{1/\log x} = e = O(1)$). De totale restterm wordt hiermee (aangezien $\log T \ll \log x = S$)

$$x \cdot O\left(\frac{\log^2 x}{T} + \frac{Sx^{1/S}}{T} + \frac{x^{1/S}\log T}{T\min(S, \log T)} + x^{-d/\log T}\log^2 T\right) = x \cdot O\left(\frac{\log^2 x}{T} + x^{-d/\log T}\log^2 x\right)$$

waaruit ook blijkt dat het niet nodig is om de keuze van S te verfijnen, aangezien de eerste (S-onafhankelijke) term in (5.9) de S-afhankelijke termen nu domineert. Stellen we $T =$

[23] [7, Theorem 6.9, p. 179]

$\exp(\sqrt{d\log x})$, dan zijn de laatste twee termen precies even groot en gelijk aan $\log^2 x \cdot x^{-\sqrt{d\log x}}$. Aangezien $\log^2 x \ll \exp(\varepsilon\sqrt{\log x})$ voor $\varepsilon = \sqrt{d} - d > 0$ is dit $\ll \exp(-d\sqrt{\log x})$.
Voor willekeurige $x > 0$ (niet noodzakelijk van de vorm $N+1/2$) ten slotte, volgt het beweerde uit

$$\begin{aligned}\psi(x) - x &= \psi(\lfloor x\rfloor + 1/2) - x \\ &= -\{x\} + 1/2 + O\left((\lfloor x\rfloor + 1/2)e^{-d\sqrt{\log(\lfloor x\rfloor+1/2)}}\right) \\ &= O\left(xe^{-d\sqrt{\log x}}\right),\end{aligned}$$

gelet op

$$\begin{aligned}\sqrt{\log(\lfloor x\rfloor + 1/2)} &= \sqrt{\log(x + O(1))} \\ &= \sqrt{\log x + O(1)} \\ &= \sqrt{\log x} + O(1)\end{aligned}$$

wegens de middelwaardestelling, omdat $\log x$ en $\sqrt{x}$ begrensde (zelfs dalende) afgeleide hebben. □

Opmerking 5.7. *Men kan zich afvragen of de keuze van T beter kan indien we in (5.11) niet de afschatting $\log T \ll \log x$ gebruiken. Stellen we $T = U\exp(\sqrt{d\log x})$, dan is de restterm*

$$\begin{aligned}&x \cdot O\left(\frac{\log^2 x}{T} + x^{-d/\log T}\log^2 T\right) \\ &= xe^{-\sqrt{d\log x}} \cdot O\left(\frac{\log^2 x}{U} + e^{\sqrt{d\log x} - d\log x/\log T}(\log U + \sqrt{d\log x})^2\right)\end{aligned}$$

zodat we $U \geqslant 1$ willen, waarbij $\sqrt{d\log x} - d\log x/\log T = \sqrt{d\log x}\log U/\log T \geqslant 0$ voor $U \geqslant 1$. De bekomen restterm is dus minstens

$$\gg xe^{-\sqrt{d\log x}}\left(\frac{\log^2 x}{U} + 1 \cdot (0 + \sqrt{d\log x})^2\right)$$

waaruit blijkt dat de restterm hoogstens een factor $\log x$ beter kan, hetgeen geen echte verbetering is zolang d niet expliciet is.

Merk verder op dat we in het bewijs niet de volledige kracht van Lemma 5.1 nodig hebben: het volstaat te weten dat bv. $\zeta(s) = O(\log^K |t|)$ voor zekere $K > 0$: dit leidt wel tot extra factoren $\log T$ in (5.10) en (5.11) en dus in de uiteindelijke restterm, maar de kwaliteit van de restterm verandert toch niet echt door factoren $\log x$ toe te voegen.

Stelling 5.8. *Zij c zoals in Stelling 5.6, dan is*

$$\theta(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \tag{5.12}$$

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right). \tag{5.13}$$

Bewijs.[24] Wegens Stelling 1.14 volstaat het dat $R(x) = xe^{-c\sqrt{\log x}}$ stijgend is voor x voldoende groot, en $\gg \sqrt{x}$ is. Dit laatste hebben we al opgemerkt voor het bewijs van Stelling 5.6; de stijgendheid volgt uit

$$R'(x) = e^{-c\sqrt{\log x}} + xe^{-c\sqrt{\log x}} \cdot \frac{-c}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{x}$$

[24] [7, Theorem 6.9, p. 179]

hetgeen positief is zodra $c/(2\sqrt{\log x}) < 1$. $\square$

5.3 De invloed van de vorm van een nulpuntvrij gebied

We gaan iets dieper in op de bewijstechniek via de Perronformule en bekijken wat de invloed is van andere nulpuntvrije gebieden:

Stelling 5.9. *Zij η zoals in Stelling 5.4 met bovendien $\eta(|t|) \gg 1/\log|t|$ en $0 < \alpha < 1$. Dan is*

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-\alpha\omega(x)}\right)$$

waarbij $\omega(x) = \inf_{t\geqslant 1}(\eta(t)\log x + \log t)$.

De voorwaarde $\eta(|t|) \gg 1/\log|t|$ is geen echte beperking, aangezien men uiteindelijk toch enkel geïnteresseerd is in functies η die trager dalen dan de reeds bekomen $c/\log(|t|+2)$.

Bewijs. Analoog aan het bewijs van Stelling 5.6: (5.9) en (5.10) blijven gelden (eventueel met extra factoren $\log T$, afhankelijk van de gebruikte bovengrens op ζ'/ζ) met $\sigma_1 = 1 - \alpha\eta(T)$. De afschatting (5.11) blijft $2x^{\sigma_1}\log^2 T + \frac{2x^{\sigma_1}}{1-\sigma_1}$. Met $\sigma_0 = 1 + 1/\log x$ wordt de restterm (in de veronderstelling dat $\log T \ll \log x$)

$$x \cdot O\left(\frac{\log^2 x}{T} + x^{-\alpha\eta(T)}\left(\log^2 x + \frac{1}{\eta(T)}\right)\right) \ll x(\log x)^2 e^{-\log T - \alpha\eta(T)\log x},$$

eventueel op factoren $\log x$ na. Het gestelde volgt nu door T optimaal te kiezen, op voorwaarde dat we factoren $\log x$ kunnen laten opslorpen in de factor $e^{-\alpha\omega(x)}$ en dat $\log T \ll \log x$ voor de optimale T. Het eerste geldt aangezien

$$\begin{aligned}\eta(t)\log x + \log t &\gg \frac{\log x}{\log t} + \log t \\ &= 2\sqrt{\log x} + \left(\sqrt{\frac{\log x}{\log t}} - \sqrt{\log t}\right)^2 \gg \sqrt{\log x},\end{aligned}$$

zodat factoren $\log x$ weggewerkt kunnen worden door α ietsje te verkleinen. (α kan dan nog willekeurig dicht bij 1 liggen.) Ook is $\omega(x) \leqslant \eta(1)\log x + \log(1) \leqslant \frac{1}{2}\log x$, zodat voor de optimale t zeker $\log t \leqslant \frac{1}{2}\log x$. $\square$

Via de sommatieformule van Abel (Stelling 1.9) kan men vervolgens analoge resttermen voor θ en π afleiden:

Stelling 5.10. *Zij η en ω zoals in Stelling 5.9 en $0 < \alpha < 1$. Dan is*

$$\theta(x) = x + O\left(xe^{-\alpha\omega(x)}\right) \tag{5.14}$$

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{-\alpha\omega(x)}\right). \tag{5.15}$$

Bewijs. Analoog als in het bewijs van Stelling 5.8 volstaat het dat $R(x) = xe^{-\alpha\omega(x)}$ stijgend is, of dus dat $\log x - \alpha\omega(x)$ stijgend is. Dit volgt uit onderstaand algemeen resultaat, aangezien

$$\log x - \alpha\omega(x) = (\log x - \omega(x)) + (1-\alpha)\omega(x)$$

de som is van twee stijgende functies. $\square$

Lemma 5.11. *Zij* $0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1$ *voor* $t \geqslant 1$ *en* $\omega(x) = \inf_{t\geqslant 1}(\eta(t)\log x + \log t)$*, dan zijn* $\omega(x)$ *en* $\log x - \omega(x)$ *stijgend.*

Bewijs.[25] Zij $x_1 < x_2$, dan is $\omega(x_1) \leqslant \inf_{t\geqslant 1}(\eta(t)\log x_2 + \log t) = \omega(x_2)$. Ook is

$$\begin{aligned}\omega(x_2) &= \inf_{t\geqslant 1}(\eta(t)\log x_1 + \log t + \eta(t)(\log x_2 - \log x_1))\\ &\leqslant \inf_{t\geqslant 1}(\eta(t)\log x_1 + \log t) + \log x_2 - \log x_1\end{aligned}$$

zodat $\log x_1 - \omega(x_1) \leqslant \log x_2 - \omega(x_2)$. □

In het bijzonder hebben we:

Gevolg 5.12. *Indien* ζ *geen nulpunten heeft in het halfvlak* $\sigma > a \geqslant \frac{1}{2}$*, dan is* $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O_\varepsilon(x^{a+\varepsilon})$ *voor alle* $\varepsilon > 0$*.*

Bewijs. Voor $\eta(|t|) = 1 - a$ is $\omega(x) = (1-a)\log x$, dus $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x \cdot x^{-(1-a)\alpha})$ voor alle $\alpha < 1$. □

Men kan aantonen dat de omgekeerde implicatie ook geldt (zie bv. [5, Theorem 31, p. 84]). Het is geweten dat ζ oneindig veel nulpunten heeft die symmetrisch t.o.v. de lijn $\sigma = \frac{1}{2}$ liggen (zie Gevolg 4.26 en Gevolg 4.31), dus zeker oneindig veel nulpunten met reëel deel $\geqslant \frac{1}{2}$.

Merk op dat Stelling 5.9 in het geval van $\eta(|t|) = c/\log(|t|+2)$ de de la Vallée-Poussin restterm oplevert, m.a.w. dat $\inf_{t\geqslant 1}(\log x/\log(t+2) + \log t) \asymp \sqrt{\log x}$: enerzijds is, door $\log(t+2) = \sqrt{\log x}$ te kiezen,

$$\inf_{t\geqslant 1}\left(\frac{\log x}{\log(t+2)} + \log t\right) \leqslant 2\sqrt{\log x}$$

en anderzijds is (zoals in het bewijs van Stelling 5.9)

$$\frac{\log x}{\log(t+2)} + \log t \gg \sqrt{\log x}.$$

We vermelden nog het volgende resultaat:

Stelling 5.13 (Littlewood, 1922)**.** *Voor zekere* $c > 0$ *heeft* $\zeta(s)$ *geen nulpunten in het gebied*

$$\sigma > 1 - c \cdot \frac{\log\log(|t|+3)}{\log(|t|+3)}.$$

Hiermee levert Stelling 5.9:

Stelling 5.14. *Voor zekere* $c > 0$ *is*

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x \log\log x}}).$$

Bewijs.[26] Het volstaat aan te tonen dat

$$\inf_{t\geqslant 1}\left(\frac{\log\log(t+3)}{\log(t+3)}\log x + \log t\right) \asymp \sqrt{\log x \log\log x}.$$

Kies $T(x)$ zo dat $\log(T+3) = \sqrt{\log x}$ (dit mag, want $T(x) \geqslant 1$ voor x voldoende groot). Dan is

$$\frac{\log\log(t+3)}{\log(t+3)}\log x + \log t \gg \begin{cases} 2\sqrt{\log x \log\log t} \geqslant \sqrt{2\log x \log\log x} & \text{voor } t \geqslant T \\ \frac{\log\log(T+3)}{\log(T+3)}\log x = \frac{1}{2}\sqrt{\log x \log\log x} & \text{voor } t \leqslant T \end{cases}$$

(aangezien $\log\log t/\log t$ dalend is voor $t \geqslant e$), en deze laatste ondergrens wordt bereikt voor $t = T$ (op een term $\log T = O(\log\log x)$ na), door de keuze van T. □

[25] [5, p. 63]
[26] [5, Theorem 24, p. 66]

5.4 De priemgetalstelling voor Beurling-priemgetallen

Merkwaardig aan de methode van Hadamard en de la Vallée-Poussin is dat ze bijzonder weinig informatie gebruikt over de gehele getallen: eens enkele eigenschappen van ζ zijn verworven (Dirichletreeks, integraalrepresentatie en analytische voorzetting) bestaan het vervolg van hun bewijzen van de priemgetalstelling uit analyse van $\zeta(s)$. Dit brengt met zich mee dat hun methode toepasbaar is op veel algemenere problemen, namelijk de verdeling van zogeheten *veralgemeende priemgetallen* of *Beurling-priemgetallen*:
Zij $P = (p_1, p_2, \ldots)$ een rij reële getallen met

$$1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n \to \infty.$$

De termen van P noemen we de (veralgemeende) priemgetallen, en men definieert de priemtelfunctie $\pi_P(x)$ (soms kortweg $\pi(x)$) voor $x > 0$ als het aantal termen van P kleiner dan x. Aangezien we even grote priemgetallen toelaten, definiëren we de (veralgemeende) gehele getallen van het systeem P als formele producten, d.w.z. als rijen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ waarvan slechts een eindig aantal termen niet-nul is, met in gedachten dat zo'n rij staat voor het reëel getal $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots$. (Indien bijvoorbeeld $p_1 = p_2$, beschouwen we ze dus toch als verschillende veralgemeende gehele getallen.) Deze definitie betekent dat we unieke factorisatie hebben. Hiermee wordt het aantal gehele getallen kleiner dan x

$$I_P(x) = \#\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots \leqslant x\}$$

(merk op dat $I_P(x) < \infty$ aangezien de priemgetallen groter dan 1 zijn en divergeren. In het geval van de gewone priemgetallen is dus $I_P(x) = \lfloor x \rfloor$. We noteren de veralgemeende gehele getallen ook nog door $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant \ldots$ waarbij elk element n_k van deze rij kan geschreven worden als een eindig product $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots$ (met dus $n_1 = 1$ en $n_2 = p_1$); de precieze volgorde waarin even grote gehele getallen worden geplaatst, maakt niet uit. Landau bewees het volgende: ([1, p. 155])

Stelling 5.15. *Zij P een verzameling veralgemeende priemgetallen en veronderstel dat*

$$I_P(x) = Ax + O(x^\theta)$$

voor zekere $A > 0$ en $\theta < 1$ (in het geval van $\mathbb{Z}$ is $A = 1$ en kunnen we $\theta = 0$ nemen). Dan is

$$\pi_P(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Het bewijs hiervan volgt dezelfde lijnen als dat van de gewone priemgetalstelling: de voorwaarde op de groei van $I_P(x)$ impliceert de absolute convergentie van de veralgemeende zètafunctie

$$\zeta_P(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^s}$$

in het halfvlak $\sigma > 1$. Deze voldoet aan een analoge integraalrepresentatie als de Riemann-zèta-functie; i.h.b. heeft ζ_P een analytische uitbreiding op het halfvlak $\sigma > \theta$ die analytisch is met uitzondering van een pool van orde 1 voor $s = 1$. Om gelijkaardige redenen volgt de identiteit

$$-\frac{\zeta_P'}{\zeta_P}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_P(n_k)}{n_k^s}$$

met Λ_P de veralgemeende Von Mangoldt-functie, zodat we beschikken over dezelfde 3–4–1-ongelijkheid voor $-\zeta_P'/\zeta_P$. Uit de integraalrepresentatie volgt een afschatting voor ζ_P analoog aan Lemma 3.3, en hiermee beschikken we over al het nodige materiaal om de methode uit sectie 3 toe te passen (in feite is het bewijs helemaal hetzelfde), en vervolgens $\psi_P(x)$ af te schatten via de Perronformule.
We kunnen voor veralgemeende priemgetallen geen functionele gelijkheid voor de geassocieerde zèta-functie verwachten; daarom is de methode uit sectie 4 hier niet toepasbaar. Merk dus op dat we ook hier de de la Vallée-Poussin restterm verkrijgen (indien de hoofddterm $\mathrm{Li}(x)$ wordt gekozen), dankzij de voorwaarde op $I_P(x)$.
Beurling ging verder en bewees het volgende: ([1, p. 156])

Stelling 5.16. *Zij P een verzameling veralgemeende priemgetallen en veronderstel dat*

$$I_P(x) = Ax + O\left(\frac{x}{\log^\gamma x}\right)$$

voor zekere $A > 0$ en $\gamma > \frac{3}{2}$. Dan is

$$\pi_P(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Ook gaf hij een voorbeeld van een verzameling priemgetallen met $\gamma = \frac{3}{2}$ waarvoor de priemgetalstelling niet geldt. De bewijsmethode bestaat terug uit het bestuderen van de geassocieerde zèta-functie. Onder de gestelde voorwaarden heeft deze echter geen analytische voortzetting in een gebied links van het halfvlak $\sigma > 1$, zodat de methodes uit sectie 3 niet van toepassing zijn in deze context.
De priemgetalstelling van Beurling is verder veralgemeend door verschillende auteurs; zie bijv. [6], [10].

5.5 Meer over de groei van de zèta-functie

Zoals besproken na Stelling 5.3, kan de restterm in de priemgetalstelling verbeterd worden indien betere afschattingen gekend zijn voor ζ in zekere halfvlakken van de vorm $\sigma \geqslant \sigma_0$ met $\sigma_0 < 1$. We hebben de volgende elementaire verbetering van Lemma 3.3:

Stelling 5.17.

$$\zeta(s) = O(\log|t|) \qquad \textit{uniform voor } \sigma \geqslant 1, t \geqslant 1 \tag{5.16}$$

$$\zeta(s) = O_\delta(|t|^{1-\delta}) \qquad \textit{uniform voor } \sigma \geqslant \delta, t \geqslant 1, \tag{5.17}$$

voor $0 < \delta < 1$.

Bewijs.[27] Wegens Stelling 2.23 is voor $x > 0$ en $t \geqslant 1$ (de afschattingen voor $t \leqslant -1$ volgen dan uit $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$)

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{x^{1-\sigma}}{|s-1|} + \frac{1}{x^\sigma} + |s| \int_x^\infty u^{-\sigma-1} du.$$

[27] [5, Theorem 9, p. 27]

Aangezien $|s-1| \geqslant t$ en $|s| \leqslant \sigma + t$ is dit hoogstens

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{x^{1-\sigma}}{t} + \frac{1}{x^\sigma} + (\sigma + t)\frac{x^{-\sigma}}{\sigma}. \tag{5.18}$$

Als $\sigma \geqslant 1$ zijn enkel de eerste en de laatste term divergent, en $x = t$ geeft als bovengrens

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1+t}{x} = O(\log t).$$

Als $\sigma \geqslant \delta$, $0 < \delta < 1$ schatten we (5.18) verder af met

$$\int_0^x \frac{du}{u^\delta} + x^{1-\delta} + \frac{1}{x^\delta} + (1 + t/\delta)x^{-\delta} = \left(\frac{x}{1-\delta} + x + 1 + (1 + t/\delta)\right) x^{-\delta},$$

en $x = t$ levert het beweerde. □

Deze stelling geeft (voor $\sigma \geqslant \delta < 1$) echter geen betere asymptotische formule voor $\log|\zeta(s)|$ dan $O(\log|t|)$, die we ook uit Lemma 3.3 hadden kunnen halen.

De meest effectieve verbeteringen van de restterm in de priemgetalstelling tot dusver zijn allemaal via deze weg gebeurd ([8, p. 178]): men probeert een goede afschatting van $\zeta(s)$ te vinden via de algemenere integraalrepresentatie van ζ, en die informatie wordt via de methode van de la Vallée-Poussin en Hadamard omgezet naar een restterm. De belangrijkste moeilijkheid bestaat uit het afschatten van

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s},$$

een uitdrukking die als *exponentiële som* wordt aangeduid. Een hele variatie aan technieken is ontwikkeld om dergelijke sommen af te schatten: een niet-triviaal maar elementair resultaat bestaat erin exponentiële sommen van de vorm

$$\sum_{a < n \leqslant b} e^{if(n)}$$

met f een reële functie, te benaderen door een meetkundige reeks, hetgeen goed lukt op voorwaarde dat f niet te snel stijgt of daalt. Weyl exploiteerde dit resultaat (de Kusmin-Landau-ongelijkheid, zie bv. [3, Theorem 2.1, p. 7]) verder door de voorwaarden op het traag variëren van f te verzwakken, en vele verdere verbeteringen hebben we te danken aan o.a. van der Corput, Littlewood, Vinogradov en Korobov, met succesvolle toepassingen op de Riemann-zèta-functie:

Stelling 5.18 (Littlewood, 1922)**.** *Voor* $|t| \geqslant 3$ *is*

$$\zeta(1+it) \ll \frac{\log|t|}{\log\log|t|}.$$

Dit restultaat (zie bv. [3, Theorem 2.14, p. 19]) leidt tot het nulpuntvrij gebied uit Stelling 5.13. Door een nog meer zorgvuldige behandeling van exponentiële sommen kan men aantonen:

Stelling 5.19 (Vinogradov-Korobov)**.** *Voor* $|t| \geqslant 2$ *is*

$$\zeta(1+it) \ll \log^{2/3}|t|$$

en ζ *heeft geen nulpunten in het gebied*

$$\sigma > 1 - c(\log\log(|t|+3))^{-1/3}(\log(|t|+3))^{-2/3}$$

voor zekere $c > 0$.

Referenties

[1] P. T. Bateman, H. G. Diamond. *Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers*, in: Studies in Number Theory, pp. 152–210, Math. Assoc. Amer., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

[2] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable I.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[3] S. W. Graham, G. Kolesnik. *van der Corput's Method of Exponential Sums.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[4] A. J. Hildebrand. *Introduction to analytic number theory.* University of Illinois Urbana-Champaign, 2005. Lecture Notes from an introductory graduate course on Analytic Number Theory. `http://www.math.uiuc.edu/~hildebr/ant/`

[5] A. E. Ingham. *The Distribution of Prime Numbers.* Cambridge University Press, Cambridge, 1932.

[6] J.-P. Kahane. *Sur les nombres premiers généralisés de Beurling. Preuve d'une conjecture de Bateman et Diamond.* J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), 251–266.

[7] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[8] M. Overholt. *A Course in Analytic Number Theory.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[9] S. G. Révész. *The prime number theorem and landau's extremal problems.* Harmonic Analysis Seminar at the Rényi Institute Lecture Notes. `http://www.renyi.hu/~revesz/`

[10] J.-C. Schlage-Puchta, J. Vindas. *The prime number theorem for Beurling's generalized numbers. New cases.* Acta Arith. **153** (2012), 299–324.

[11] E. W. Weisstein. *Legendre duplication formula.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/LegendreDuplicationFormula.html`